



Hilbert Huangova transformace Hilbert Huangov transform

Michal Bejček, Jiří Franc

Abstrakt: Článek nejprve představuje Hilbert Huangovu transformaci a její principy. Druhou částí článku je shrnutí zajímavých výsledků a aplikací Hilbert Huangovy transformace v posledních několika letech.

Klíčová slova: Hilbert-Huangova transformace

Abstract: The article first presents Hilbert Huang transform and its principles. The second part of the article is a summary of some interesting results and applications of Hilbert Huang transformation in the last few years.

Keywords: Hilbert-Huang transform

JEL Classification: C8, C6

Úvod

Hilbert Huangova transformace (HHT) je metoda, která se používá na analýzu signálu. Velmi dobře funguje i na nestacionární a nelineární data. Využívá algoritmus nazvaný Empirická modální dekompozice (EMD), který rozkládá signál na komponenty obsahující v jednom okamžiku vždy jen jednu frekvenční složku. V porovnání například s Fourierovou transformací je HHT spíše algoritmem, který lze aplikovat na množinu dat, než teoretickým nástrojem. Využití HHT je velmi široké a zahrnuje mnoho oblastí jako jsou analýza finančních dat, fyzika, chemie, medicína, meteorologie nebo rozpoznávání řeči.

1. EMD algoritmus

Hlavní myšlenka EMD spočívá v rozložení signálu $x(t)$ na konečný počet funkcí $C_m(t)$, které se nazývají intrinsic mode functions (IMFs). IMF musí splňovat dvě podmínky:

- 1) Počet extrémů (tedy minim a maxim) musí být buď roven, nebo se lišit nejvýše o jedna, počtu průchodů funkce nulou.
- 2) V libovolném bodě je průměrná hodnota definována obálkou z lokálních maxim a lokálních minim rovna nule.

První požadavek je podobný požadavku na úzké pásmo pro stacionární Gaussovský proces, hodnoty se od sebe nesmí příliš lišit. Druhá podmínka je lokální, je odvozena z té první a zajišťuje, že okamžitá frekvence nebude mít nadbytečné výkyvy vyvolané asymetrickými průběhy. Lze říct, že je zde podobnost s Fourierovou transformací, rozděluje signál na součet jednodušších funkcí. Nevýhodou Fourierovy transformace je, že dává dobré výsledky pouze pro signál, který je stacionární a plně periodický. Algoritmus EMD není tímto limitován. Jsou zde však problémy například s koncovými body. Možná řešení jsou naznačena v například v [12], [13], [14].

Postup, jak rozložit signál na IMF, je následující:

- 1) Nalezneme lokální extrémy (minima i maxima) signálu $x(t)$
- 2) Z nalezených extrémů vytvoříme obálku signálu spojením maxim kubickým splajnem a minim, také kubickým splajnem. Signál je tedy ohraničený obálkami shora i zespodu.
- 3) Spočteme průměr $\mu_1(t)$ tak, že zprůměrujeme obálky.
- 4) Na závěr spočteme rozdíl

$$h_1(t) = x(t) - \mu_1(t) \quad (1)$$

- 5) Funkce $h_1(t)$ pravděpodobně nebude splňovat podmínky pro IMF. Proto se tento proces opakuje tak, že v příští iteraci se rozdíl signálů vezme jako signál pro tuto iteraci.

Formálně můžeme zapsat, že $(k+1)$. iterace vypadá

$$h_{k+1}(t) = h_k(t) - \mu_{k+1}(t) \quad (2)$$

Pokud po provedení $(k+1)$ iterací bude $(k+1)$. iterace označená jako $h_{k+1}(t)$ mít vlastnosti IMF, tedy bude vyhovovat oběma výše uvedeným podmínkám, může být brána jako první IMF komponenta, označená jako $C_1(t)$, tedy zapíšeme

$$C_1(t) = h_{k+1}(t) \quad (3)$$

Nyní je nutné vysvětlit, jak určit, zda iterace $h_k(t)$ odpovídá svými vlastnostmi IMF. Obvykle se pro určení nutných vlastností používá standardní odchylka δ , což znamená, že ověříme splnění následující nerovnosti

$$\delta_d = \frac{\sum_{t=1}^T |h_{d-1}(t) - h_d(t)|^2}{\sum_{t=1}^T |h_{d-1}(t)|^2} \leq \eta \quad (4)$$

Dalším krokem procesu je určení rezidua jako rozdílu původního signálu a první IMF

$$r_1(t) = x_1(t) - C_1(t) \quad (5)$$

V dalším kroku vezmeme reziduum $r_1(t)$ jako nový signál a opakujeme postup, který je uveden výše. Tím získáme druhou IMF označenou jako $C_2(t)$.

Opakování postupu je třeba udělat tolik, dokud po nějakém kroku nebude reziduum $r_m(t)$ monotonní funkcí. Na konci procesu dekompozice signálu $x(t)$ lze původní signál vyjádřit jako součet všech IMF a posledního rezidua

$$x(t) = \sum_{i=1}^m C_i(t) + r_m(t)$$

(6)

Další možností, jak vysvětlit fungování algoritmu EMD, je, že extrahuje nejvyšší frekvence kmitání, která zůstává v signálu. Lokálně tedy každá IMF obsahuje nižší frekvenci kmitání, než IMF získaná v předchozím kroku algoritmu. Není nutné předpokládat, že signál je soubor harmonických funkcí, lze tedy EMD využít pro analýzu nestacionárních a nelineárních dat. Výhodou tohoto procesu také je, že výsledný soubor funkcí zachovává nestacionární vlastnosti původního signálu. Navíc je celý postup intuitivní a není závislý na vstupních datech.

To, že dekompozice je kompletní, dokládá rovnice (6). Originální signál může být jednoduše zrekonstruován tak, že jednoduše sečteme všechny IMF a reziduum. Pro ilustraci, jak vypadají jednotlivé IMF pro konkrétní signál (v tomto případě se jedná o náhodná reálná čísla z určitého intervalu), jsou původní signál a jednotlivé IMF zobrazeny na obrázku 1. V tomto případě je první IMF funkce označená spojitou čarou (ta, která nejvíce osciluje). U dalších IMF se frekvence postupně snižuje.

Druhou částí metody je Hilbertova transformace, která se používá k získání okamžité frekvence daného signálu $x(t)$. Jako výsledek HT signálu $x(t)$ definujeme $y(t)$ dané rovnicí:

$$y(t) = \frac{P}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau$$

(7)

kde P je hlavní hodnota integrálu. Z rovnice (7) vidíme, že Hilbertova transformace je definována jako konvoluce signálu $x(t)$ s $1/t$. Hilbertova transformace je tedy schopna určit lokální vlastnosti signálu $x(t)$. Analytický signál $z(t)$ lze získat spojením $x(t)$ a jeho Hilbertovy transformace $y(t)$:

$$z(t) = x(t) + iy(t) = a(t)e^{i\varphi(t)}$$

(8)

$$a(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} \quad (9)$$

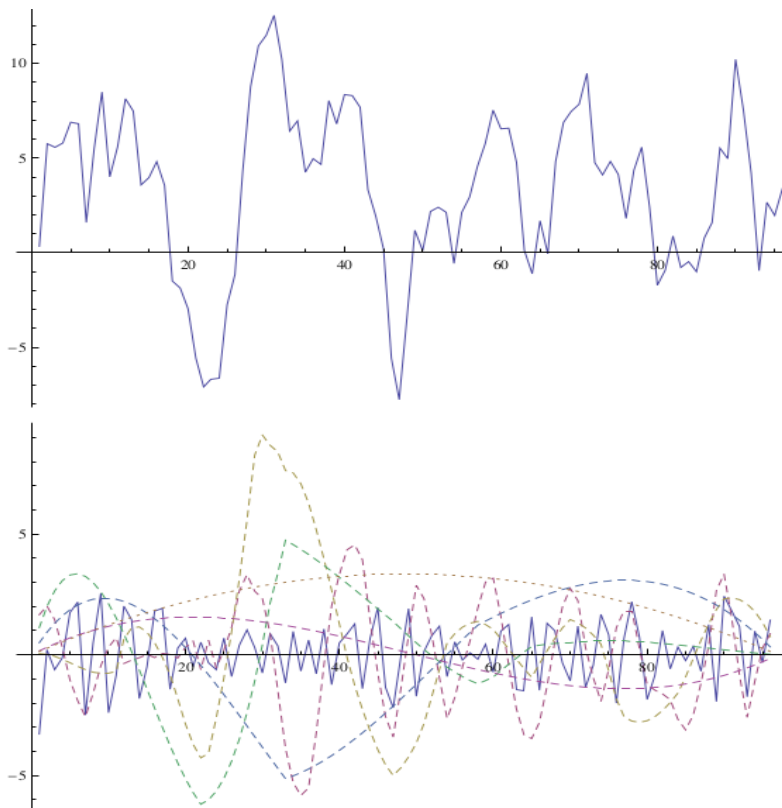
$$\varphi(t) = \arctan \frac{y(t)}{x(t)} \quad (10)$$

Zde $a(t)$ představuje okamžitou amplitudu $x(t)$, která ukazuje, jak se energie $x(t)$ mění v čase a $\varphi(t)$ je okamžitá fáze $x(t)$. Okamžitá frekvence $\omega(t)$ je definována jako časová derivace okamžité fáze $\varphi(t)$:

$$\omega(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt} \quad (11)$$

Kombinace EMD a Hilbertovy transformace pak tvoří Hilbert Huangovu transformaci.

Obrázek 1: Ukázka rozkladu na IMF (dolní část obrázku)



2. Splajn funkce

EMD velmi dobře funguje pro spojitý signál, použití pro nespojitý signál je problematické, protože může vést ke vzniku neočekávaných zbytků původního signálu. Problémem je samotná podstata přirozených splajnů, které se nejsou schopny vyrovnat s ostrými přechody na místech, kde se diskretní signál mění na jinou funkci. V této situaci mají splajny tendenci oscilovat a průběh signálu přesně nekopírují. Ukázky je možné vidět v [3]. Blízko ostrých přechodů jsou tedy překmity, což ale popírá fyzikální podstatu procesu. Tuto aproximaci proto nelze použít.

Je ale možné použít řešení, které používá jiný typ splajn funkcí. Místo přirozených splajnů se použijí Hermitovské splajn funkce, které jsou založené na polynomech třetího řádu:

$$f_i(x) = a_i + b_i x + c_i x^2 + d_i x^3 \quad (12)$$

Přirozeně mohou nastat situace, které budou i v tomto případě problematické a dekompozice původního signálu nebude možná. Tím se ale zabývat nebudeme, protože pro další pochopení problematiky to již není nutné.

V další části textu pak bude následovat přehled vybraných zajímavých výsledků v oblasti HHT za několik posledních let. Nyní se již soustředíme na představení konkrétních publikací, které popisují aplikaci HHT nebo popisují vylepšení HHT.

Derivative-optimized empirical mode decomposition for the Hilbert–Huang transform
autoři: Peter C. Chu, Chenwu Fan, Norden Huang[4]

Základní otázkou, kterou řeší tento článek, je možnost, jak systematicky určovat horní a dolní obálky signálu, tedy jestli může být lokální maximum a minimum objektivně a optimálně určeno na dvou koncových bodech bez použití extrapolace nebo interpolace a také, jestli součet všech IMF může být vždy roven původnímu signálu. Tento článek popisuje řešení těchto problémů pomocí modifikace EMD nazvané derivative-optimized EMD. Horní a dolní obálky jsou zde získány pomocí prvních derivací ve dvou koncových bodech, označených jako q_L a q_R jako parametry, které jsou optimálně určeny na základě minimální časové proměnlivosti složky s nízkou frekvencí v každém kroku rozkladu původního signálu. Pro horní a dolní obálky jsou využity hybridní Hermitovské polynomy. Pro demonstraci byl použit příklad časové řady $\{x_i\}$, která je dána zápisem:

$$x(t_i) = f_0(t_i) + \sum_{k=1}^3 f_k(t_i), f_0(t_i) = A_0 t_i^2, f_k(t_i) = A_k \sin(\omega_k t_i + \varphi_k), k = 1, 2, 3 \quad (13)$$

$$x_i = x(t_i), t_i = (i - 1)\Delta t, t_1 = 0, t_N = 0.9 \text{ s}, \Delta t = 0.0018 \text{ s}, N = 501.$$

Tabulka 1 Parametry časové řady

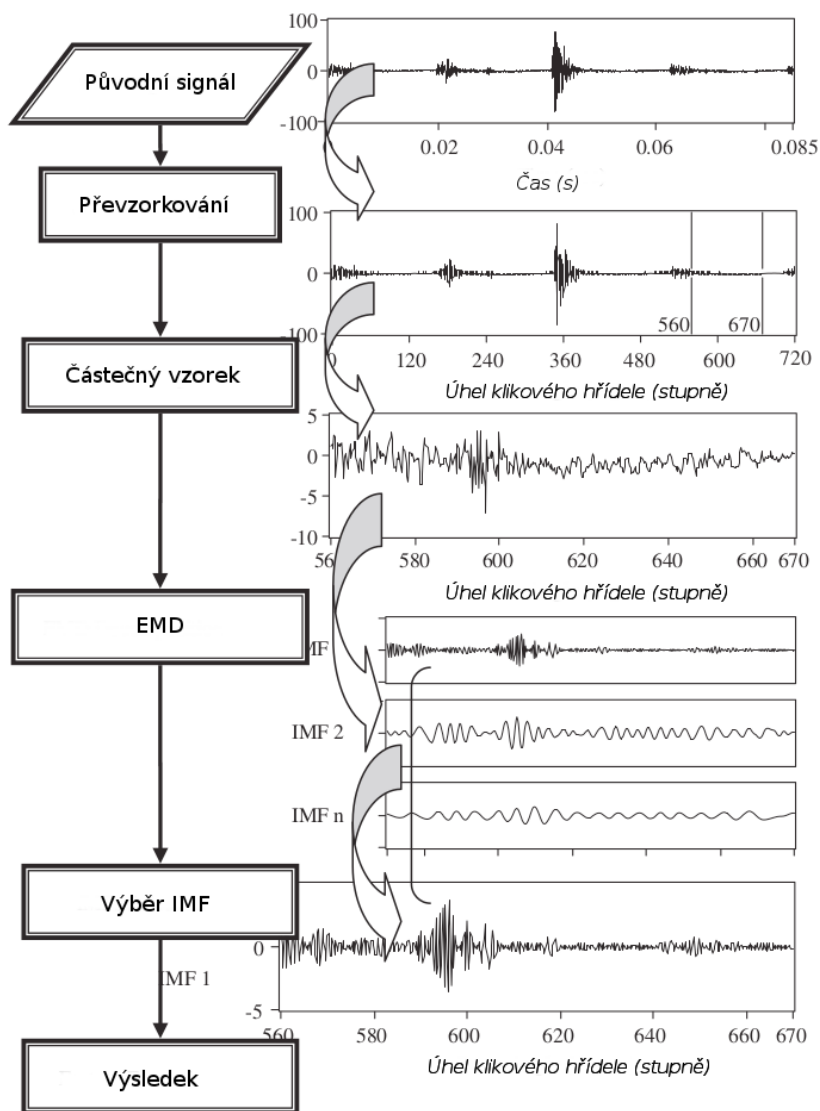
k	0	3	2	1
A_k	0.5	1.0	0.5	0.20
ω_k		6π (3 Hz)	40π (20 Hz)	100π (50 Hz)
φ_k		0.01	0	0.005

Použitá časová řada je pro aplikaci EMD vhodná. Výsledek použití EMD je přesvědčivý a v případě zmíněné časové řady opravdu dojde ke zlepšení situace. Experimentální ověření na stejné situaci při použití klasického postupu dává článku za pravdu. Použití hybridních Hermitovských polynomů pro stanovení horní a dolní obálky s prvními derivacemi v těchto dvou koncových bodech q_L a q_R jako parametrů je výhodné. Sada dvou algebraických rovnic pro q_L a q_R je odvozena na základě minimální integrované absolutní hodnoty derivace třetího řádu (odpovídá minimální časové proměnlivosti). Horní a dolní obálky takto získané jsou optimální. Jako nevýhodu návrhu vnímám jeho relativní komplikovanost při počítání q_L a q_R pro složitější signály. I pro v článku zmíněnou časovou řadu nebyl výpočet zcela triviální.

EMD-based fault diagnosis for abnormal clearance between contacting components in a diesel engine, autoři: Yujun Li, Peter W. Tse, Xin Yang, Jianguo Yang[5]

Článek představuje novou metodu diagnostiky chyb, která byla vytvořena k identifikaci některých problémů s důležitými komponentami dieslových motorů. Výhodou této metody je to, že nevyžaduje porovnání aktuálních provozních parametrů s těmi, které byly shromážděny jako základní. Metoda je založena na tom, že se v prvním kroku pomocí teoretického modelování získají základní parametry komponenty. Neobvyklé chování komponent je zjištěno na základě sledování během provozu. K přesnému zjištění načasování výskytu problémů z vibračních signálů se použije vzorkování a technika EMD. Tyto techniky byly zkombinovány dohromady a tvoří novou metodou ranged angle - empirical mode decomposition method (RA-EMD).

Obrázek 2: Schéma RA-EMD [5]



Článek uvádí několik příkladů využití této metody v praxi a podle prezentovaných výsledků vypadá tato modifikace EMD velmi dobře a je použitelná v praxi minimálně pro popisovanou situaci v oblasti dieslových motorů. Hlavní výhodou je, že metoda nevyžaduje složité měření, ale k získání podkladových dat pro analýzu stačí pouze akcelerometr a jednoduchý enkodér. Proti dosud využívaným metodám nevyžaduje naměřená data z dobře fungujícího motoru, která jsou pak využita pro porovnání.

Diagnostics of gear faults based on EMD and automatic selection of intrinsic mode functions, autoři: Roberto Ricci, Paolo Pennacchi

Článek popisuje zlepšení EMD a Hilbertovy transformace (HT) prostřednictvím zavedení vhodného indexu, který umožňuje automatický výběr IMF. Tím překonává jedno z omezení techniky EMD-HT, protože ne všechny IMF získané rozložením signálu se dají dobře použít do HT.

Základní myšlenkou článku je výběr IMF pro použití v HT. Volba IMF vhodných pro analýzu je obvykle realizována vizuálně nebo na základě zkušeností uživatele. Tento proces není automatický, ale je nutná interakce s uživatelem. Autoři proto nabízejí vytvoření automatického indexu zásluh (merit index - MI). MI je ve skutečnosti lineární kombinací dvou indexů: hodnota stupně periodicity IMF a koeficient šikmosti IMF.

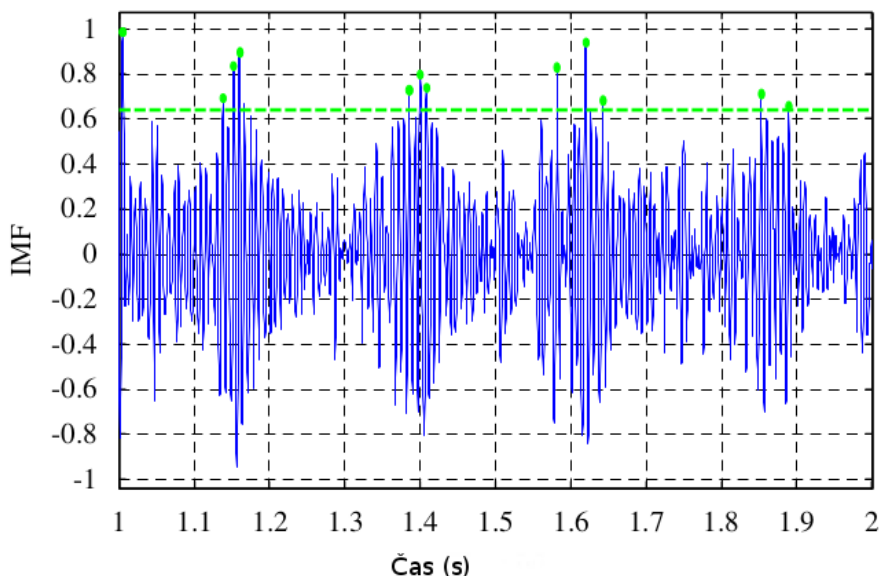
$$MI(IMF) = P - k|\text{šikmost}(IMF)|,$$

$$P = \frac{1}{\text{std} \left[\frac{\max_{i+1}(IMF) - \max_i(IMF)}{\text{délka periody}} \right]}$$

(14)

Parametr k je specifický pro uvažovaný mechanický systém. Pro experimentální příklady v článku je použito $k=1$. Pro výpočet P bude uvažovat obecnou IMF zobrazenou na obrázku 3. Budeme se snažit najít její maximální hodnoty ($\max(IMF)$) překračující výchozí práh (zobrazeno jako čárkovaná čára na obrázku 3) a rozdíl mezi dvěma po sobě následujícími úseky maxima (body na obrázku 3) se pak vyhodnotí na základě počtu těchto bodů.

Obrázek 3: Výpočet indexu periodicity [6]



Rozdíly, normalizované vzhledem k délce periody (s ohledem na vzorkovací frekvence), tvoří množinu dat. Převrácená hodnota standardní odchylky výsledné množiny dat představuje index periodicity P . Pokud je IMF je periodická, hodnota v hranatých závorkách v rovnici (14) je pro každou dvojici maxim přibližně 1 a standardní odchylka se blíží nule. Díky převrácené hodnotě směrodatné odchylky jsou pro periodické funkce získány vysoké hodnoty indexu P .

Vzhledem k tomu, že index P neříká nic o symetrii funkcí, šikmost IMF se vypočítává za účelem kontroly rozložení funkce kolem nulové hodnoty. Pro symetrické funkce je hodnota absolutní šikmosti nízká, merit index je vyjádřen v rovnici (14) předpokládající vysoké a kladné hodnoty pro periodické a symetrické IMF. Výběr IMF je s merit indexem jednoduchý: IMF je transformována pomocí HT, pokud je merit index kladný.

Tabulka 2: Merit index pro data z nepoškozeného motoru [6]

IMF	Index periodicity	Absolutní šikmost	Merit index
1	2.102	0.044	2.057
2	0.000	0.871	-0.871
3	0.000	0.054	-0.054
4	0.000	0.268	-0.268
5	0.000	0.761	-0.761
6	0.000	1.044	-1.044
7	0.000	0.632	-0.632
8	0.000	0.294	-0.294

Tabulka 3: Merit index pro data z poškozeného motoru [6]

IMF	Index periodicity	Absolutní šikmost	Merit index
1	0.000	0.253	-0.253
2	1.177	0.128	1.048
3	1.856	0.085	1.771
4	1.279	0.132	1.146
5	0.000	1.150	-1.150
6	0.000	0.995	-0.995
7	0.000	0.255	-0.255
8	0.000	0.317	-0.317

Vzhledem k prezentovaným výsledkům vypadá metoda velice zajímavě.

Characterization of gear faults in variable rotating speed using Hilbert-Huang Transform and instantaneous dimensionless frequency normalization, autoři: T.Y. Wu, J.C. Chen, C.C. Wang

Článek se věnuje možnosti využití normalizace okamžité bezrozměrné frekvence (DLF) a Hilbert-Huangovy transformace (HHT) k popisu různých poruch převodovky v případě, kdy je rychlost otáčení proměnlivá. Normalizovaná DLF z vibračních signálů se vypočítává na základě rychlosti otáčení hřídele a okamžitých frekvencí IMF, které se rozkládají pomocí rozkladu EMD.

Charakteristické frekvence převodovky přepravní soustavy, včetně otáčení hřídele, stejně tak záběrové frekvence ozubených kol, závisí rychlostí otáčení. Článek řeší situace s proměnlivou rychlostí otáčení, proto je nezbytné určit okamžité frekvence vibračních signálů.

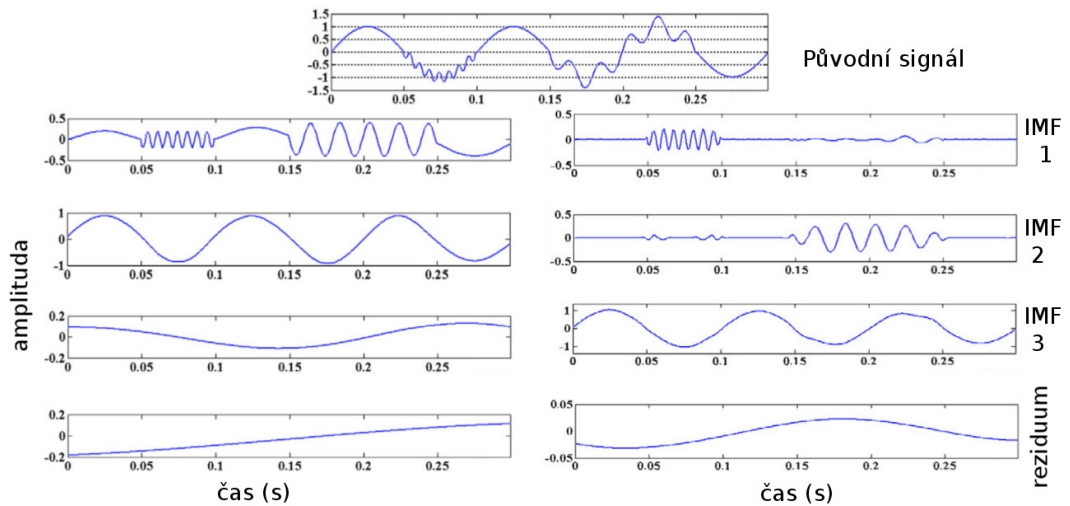
Pro výpočet okamžitých frekvencí byly proto navrženy různé metody, které umožňují překonat obtíže s analytickým signálem, který používá Hilbertova transformace. Metody jsou popsány v publikaci [8]. Autoři článku používají k určení okamžité frekvence IMF normalizovanou Hilbertovu transformaci (NHT), zobecněnou Zero-Crossing (GZC) metodu a metodu Direct Quadrature (DQ). Nový přístup v oblasti použití HHT je právě použití DLF, kdy se tento postup použije k odstranění vlivu rotace hřídele. Testovací scénáře pak popisují selhání převodovky zahrnující situace potřebované ozubení, poškozené ozubení a nevyváženost převodovky. Opět se jedná o zajímavý příspěvek v oblasti výzkumu HHT.

Comparing the applications of EMD and EEMD on time–frequency analysis of seismic signal, autoři: Tong Wang, Mingcai Zhang, Qihao Yu, Huyuan Zhang

Posledním zmíněným článkem je publikace porovnávající EMD a EEMD (ensemble EMD). Nepřináší novou metodu, jelikož tato metoda byla již představena v [11], ale ukazuje možnosti využití EEMD.

Princip EEMD je jednoduchý. K datům se přidá bílý šum, rovnoměrně rozdělený do celého prostoru daného frekvencí a časem. Algoritmus je následující:

- 1) Přidání bílého šumu k originálnímu signálu
- 2) Dekompozice signálu s přidaným bílým šumem na IMF pomocí EMD
- 3) Opakování kroků 1 a 2 s různým bílým šumem v každém opakování
- 4) Získání odpovídajících IMF z rozkladu
- 5) Střední hodnota tohoto souboru IMF z dekompozicí se považuje za výsledek
- 6) Střední hodnota tohoto souboru reziduí z dekompozicí se považuje za výsledek

Obrázek 4: Původní signál a IMF vzniklé z EMD a EEMD [10]

Obrázek (4) ilustruje výhodu použití EEMD v případě, kdy je signál určený k dekompozici kombinací několika různých střídajících se signálů. V případě použití EMD totiž nemusí vždy vzniknout stejné IMF. EEMD tento problém řeší, jak je vidět na obrázku (4) vpravo. Vzniklé IMF velmi dobře reflektují různé části signálu.

Závěr

Cílem článku bylo seznámení s Hilbert-Huangovou transformací, jejím možným využitím a dále seznámení se zajímavými vybranými výsledky ze zkoumání této problematiky, které budou sloužit další práci v této oblasti. Článek se zaměřil zejména na představení praktického využití HHT. Zajímavou oblastí by také bylo zmapování řešené problematiky v oblasti koncových efektů. Řešení koncových efektů také patří mezi nedořešené problémy v oblasti Hilbert-Huangovy transformace. Nebo spojení HHT s neuronovými sítěmi, jak uvádí například publikace [15], [16], [17].

Reference

- [1] Huang, N. E.- Shen, Z.- Long, S. R.- Wu, M. C.- Shih, H. H.- Zheng, Q.- Yen, N. C.- Tung, C. C.- Liu, H. H. (1998): „The Empirical Mode Decomposition and the Hilbert Spectrum for Nonlinear and Nonstationary Time Series Analysis“ (pdf). Proceedings of the Royal Society of London A 454 (1971): 903–995.
- [2] Meeson, R.N. (2003):“HHT Sifting and Adaptive Filtering”. Institute for Defense Analyses, 4850 Mark Center Drive, Alexandria, VA 22311-1882, USA. DASW01-98-C-0067

- [3] Kruger, C.J.C.: Constrained Cubic Spline Interpolation for Chemical Engineering Applications.“ [cit. 2004-11-10]. Internet resource: www.korf.co.uk/spline.pdf
- [4] Peter C. Chu, Chenwu Fan, Norden Huang: Derivative-optimized empirical mode decomposition for the Hilbert–Huang transform, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 259 (2014) 57–64
- [5] Yujun Li, Peter W. Tse, Xin Yang, Jianguo Yang: EMD-based fault diagnosis for abnormal clearance between contacting components in a diesel engine, *Mechanical Systems and Signal Processing* 24 (2010) 193–210
- [6] Roberto Ricci, Paolo Pennacchi: Diagnostics of gear faults based on EMD and automatic selection of intrinsic mode functions, *Mechanical Systems and Signal Processing* 25 (2011) 821–838
- [7] T.Y. Wu, J.C. Chen, C.C. Wang: Characterization of gear faults in variable rotating speed using Hilbert-Huang Transform and instantaneous dimensionless frequency normalization, *Mechanical Systems and Signal Processing* 30 (2012) 103–122
- [8] N.E. Huang, Z. Wu, S.R. Long, K.C. Arnold, X. Chen, K. Blank, On instantaneous frequency, *Advances in Adaptive Data Analysis* 1 (2) (2009) 177–229.
- [9] Z. Wu, N.E. Huang, Ensemble Empirical Mode Decomposition: A Noise-Assisted Data Analysis Method, *Adv. Adaptive Data Anal.* 1 (1) (2009) 1–41.
- [10] Tong Wang, Mingcai Zhang, Qihao Yu, Huyuan Zhang: Comparing the applications of EMD and EEMD on time–frequency analysis of seismic signal, *Journal of Applied Geophysics* 83 (2012) 29–34
- [11] Wu, Z.H., Huang, N.E.: Ensemble empirical mode decomposition: a noise-assisted data analysis method. Center for Ocean–Land–Atmosphere Studies Technical Report, pp. 155–156.
- [12] Bejček, M., Kokeš, J.: Empirical Mode Decomposition and Quantization Effects, *STV: Automation and Control of Mechanical Systems and Technological Processes*, 2015
- [13] Kokeš, J.: Empirical Mode Decomposition and Quantization Effects, *Automatizácie a riadenie v teórii a v praxi, ARTEP 2015*, Stará Lesná, Slovensko, 2015
- [14] Guang Yang, Xiang-Bin Sun, Ming-Xi, Zhang, Xiao-Li Li, Xin-Rong Liu: Study on Ways to Restrain End Effect of Hilbert-Huang Transform, *Journal of Computers* Vol. 25, č. 3, 2014
- [15] Chun-Fu Chen, Ming-Cheng Lai, Ching-Chiang Yeh: Forecasting tourism demand based on empirical mode decomposition and neural network, *Knowledge-Based Systems* 26 (2012) 281–287

- [16] Yu Wei, Mu-Chen Chen: Forecasting the short-term metro passenger flow with empirical mode decomposition and neural networks, *Transportation Research Part C* 21 (2012) 148–162
- [17] V. G. Kurbatsky, D. N. Sidorov, V. A. Spiryaev, N. V. Tomin: Forecasting Nonstationary Time Series Based on Hilbert–Huang Transform and Machine Learning, *Automation and Remote Control*, 2014, Vol. 75, No. 5, pp. 922–934

RNDr. Michal Bejček, Ph.D., Vysoká škola manažerské informatiky, ekonomiky a práva, Vltavská 14/585, Praha 5, e-mail: michal.bejcek@vsmiep.cz

Ing. Jiří Franc, Vysoká škola manažerské informatiky, ekonomiky a práva, Vltavská 14/585, Praha 5, e-mail: michal.bejcek@vsmiep.cz