Analýza vlivů ovlivňujících velikost volatilitní rizikové prémie měnového kurzu EUR/USD Equation Section 1 Analysis of factors influencing the size of the volatility risk premium of the EUR/USD exchange rate

Milan Fičura

Abstrakt: Práce zkoumá, které vysvětlující proměnné nejvíce ovlivňují velikost volatilitní rizikové prémie měnového kurzu EUR/USD. Ta je definována, jako rozdíl mezi opční implikovanou volatilitou (t.j. Model-Free volatilitou) a následnou realizovanou volatilitou. Z výsledků jednorozměrné i vícerozměrné regresní analýzy vyplývá, že nejsilnějším prediktorem volatilitní prémie je její ex-ante odhad v podobě rozdílu mezi Model-Free volatilitou (MFV) a volatilitou predikovanou modelem ARFIMA-RV. Dále bylo prokázáno, že velikost volatilitní prémie pozitivně závisí na jejich předchozích hodnotách za poslední den, týden a měsíc, a že ji pozitivně ovlivňuje též úroveň volatility, volatilita volatility a zpožděné hodnoty cenových skoků. Z výsledků vícerozměrných regresí vyplynulo, že zapojení všech vysvětlujících proměnných při 1% hladině významnosti vede k výraznému zpřesnění odhadů volatilitní prémie (v out-sample období) v porovnání s jednorozměrným modelem využívajícím pouze rozdílů mezi MFV a ARFIMA-RV. Regresně odhadnutá volatilitní prémie byla dále použita ke zpřesnění predikcí volatility modelu MFV. Dosažené zvýšení predikčních schopnosti však nebylo vyšší, než u lineárního regresního modelu volatility kombinujícího predikce MFV a ARFIMA-RV.

Klíčová slova: Volatilitní riziková prémie, Předvídání volatility, Realizovaná volatility, Implikovaná volatilita, Model-free volatilita, Skoková volatilita

Abstract: The work examines what prediction variables do influence the size of the volatility risk premium of EUR/USD exchange rate the most. The premium is defined as the difference between the option implied volatility (calculated as Model-Free volatility) and the subsequent realized volatility. From the results of the univariate and multivariate regression analysis it is clear that the most import prediction variable is the ex-ante estimate of the volatility risk premium constructed as the difference between Model-Free volatility (MFV) and the ARFIMA-RV forecast of realized volatility. In addition to that the size of the volatility risk premium positively depends on its past values during the last day, week and month, and it positively depends also on the current level of volatility, volatility of volatility as well as the past values of price jumps. The results of the multivariate regressions have shown that a model using all of the statistically significant variables on a 1% significance level clearly outperforms (out-of-sample) the univariate model using only the differences of MFV and ARFIMA-RV predictions as predicotrs. It has also been shown that the multivariate regression model of volatility risk premium can be used to adjust the MFV volatility forecasts in order to achieve better forecasting performance. The increase in performace is however not higher than in the case of a bivariate regression model of volatility using just MFV and ARFIMA-RV as predictors.

Keywords: Volatility risk premium, Volatility forecasting, Realized volatility, Implied volatility, Model-free volatility, Jump volatility

JEL Classification: C22, G10, G12, G13

Úvod

Investoři na kapitálových trzích jsou zpravidla rizikově averzní a při investování do rizikových aktiv požadují vyšší očekávaný výnos než u aktiv bezrizikových. Rozdíl mezi očekávaným výnosem rizikového aktiva a výnosem bezrizikového aktiva nazýváme tržní riziková prémie. Ačkoliv by se z konkávního tvaru užitkových funkcí většiny investorů mohlo zdát, že riziková prémie musí být vždy tím vyšší, čím vyšší je volatilita výnosů daného aktiva, v praxi tomu tak být nemusí, jelikož do hry vstupuje též korelace mezi výnosy jednotlivých aktiv. Investicí do portfolia různých aktiv s nižší než jednotkovou korelací výnosů mohou investoři výrazně zlepšit svůj rizikově-výnosový profil. Snaha každého investora držet portfolio, které by mu zajišťovalo z hlediska jeho užitku optimální kombinaci očekávaného výnosu a rizika pak dle Moderní Teorie Portfolia vede k tomu, že všichni investoři drží určitou kombinaci tzv. tržního portfolia a bezrizikového aktiva. Riziková prémie každého aktiva je pak dána modelem CAPM a nezávisí na jeho celkovém riziku (volatilitě), ale jen na nediverzifikovatelné složce tohoto rizika, reprezentované faktorem beta, který udává citlivost výnosů daného aktiva na výnosy tržního portfolia. Je-li korelace výnosů aktiva s výnosy tržního portfolia negativní, pak je negativní i jeho beta faktor a tím i riziková prémie a to o to více, o co vyšší je volatilita výnosů daného aktiva v porovnání s tržním portfoliem.

Tato práce se zaměřuje na výzkum specifické rizikové prémie nazývané volatilitní riziková prémie. Zatímco standardní tržní riziková prémie souvisí s proměnlivostí (volatilitou) výnosů určitého aktiva, volatilitní riziková prémie souvisí s proměnlivostí (volatilitou) jeho volatility. Tato prémie hraje roli zejména u těch aktiv, jejichž výnosy jsou vysoce citlivé na změny volatility, což jsou především opce a dále deriváty, jejichž podkladovým faktorem je určité měřítko volatility (volatility swap, variance swap, futures na index VIX, atd.).

Vzhledem k tomu, že volatilita drtivé většiny aktiv je negativně korelována s výnosy tržního portfolia (na akciovém trhu je tento jev označován jako leverage efekt) a volatilita volatility je zpravidla mnohonásobně vyšší než volatilita tržního portfolia, dosahují instrumenty citlivé na volatilitu výrazně záporných hodnot faktorů beta, což v souladu s modelem CAPM implikuje výrazně záporné rizikové prémie. Investoři spekulující na růst volatility tak dosahují záporných očekávaných výnosů, zatímco investoři spekulující na její pokles dosahují kladných očekávaných výnosů.

Dle Eraker (2009) vychází beta faktor aktiva proporcionálně navázaného na index VIX okolo -3,5 až -4,5, což je způsobeno jak zápornou korelací mezi indexem VIX a indexem S&P500 (řádově -0,7 až -0,9), tak zejména cca 5x vyšší volatilitou indexu VIX vůči indexu S&P500.

Ani takto vysoce záporné hodnoty beta faktorů však překvapivě nejsou schopny vysvětlit celou velikost volatilitních rizikových prémií (a s nimi spojených nadměrných výnosů) pozorovaných v cenách opcí a sazbách variance swapů (viz. Bakshi a Kapadia 2003, Eraker 2009, či Carr a Wu 2009).

Pro objasnění celé velikosti volatilitní rizikové prémie je tak třeba hledat další možná vysvětlení jdoucí za hranice metodiky modelu CAPM. Jedním z nejčastěji uváděných je asymetrický charakter rozdělení výnosů volatility (Eraker 2009 či Carr a Wu 2009), kdy potenciál budoucího růstu je zpravidla mnohonásobně vyšší než potenciál budoucího poklesu. Investoři spekulující na pokles volatility jsou tak vystaveni vyššímu riziku než investoři spekulující na její růst a volatilitní riziková prémie vůči této asymetrii poskytuje určitou formu kompenzace.

Jiné možné vysvětlení souvisí s tím, že volatilita je sama o sobě rizikově-averzními investory vnímána jako nežádoucí, jelikož při jejím zvýšení dochází u investorů s konkávní užitkovou funkcí ke snížení jejich užitku z držby rizikového portfolia, a to i v případě, kdy se jeho tržní cena nijak nezmění (tedy i v situaci, kdy by volatilita a výnosy tržního portfolia nebyly korelovány). Dlouhou pozici ve volatilitě je tak možné považovat za určitou formu zajištění se vůči riziku poklesu užitku v důsledku nárůstu volatility a volatilitní rizikovou prémii jako cenu tohoto zajištění.

V neposlední řadě je volatilitní rizikovou prémii možné dát do souvislosti s existenci nespojitých změn (skoků) ve vývoji ceny, které zhoršují schopnost vypisovatelů opcí zajišťovat své pozice, jelikož delta-hedging při nespojitých změnách ceny přestává fungovat. Potenciálně významná je též negativní korelace mezi cenovými skoky a pozitivními skoky ve volatilitě. Pro podrobné výzkumy zabývající se vlivem skoků na volatilitní rizikovou prémii viz Todorov (2009) či Chen a Poon (2013).

Zmíněné hypotézy vysvětlující původ volatilitní rizikové prémie implikují, že by její výši mohlo být možné modelovat za pomocí série vhodně zvolených vysvětlujících proměnných. Cílem této práce je proto sestavit vícerozměrný lineární regresní model, který by umožňoval odhadnout aktuální velikost volatilitní prémie ex-ante.

Schopnost odhadnout velikost volatilitní rizikové prémie by mohla nalézt využití v celé řadě oblastí finanční teorie i praxe. Na velikosti této prémie závisí nejen očekávaná výnosnost opčních portfolií a volatilitních derivátu, ale je možné ji využít i pro odhad tržní míry rizikové averze, tržní rizikové prémie a očekávaných výnosů akciového indexu (Bollerslev, Tauchen a Zhou 2009, Bollerslev, Gibson a Zhou 2011), či pro predikci nadměrných výnosů měnových kurzů (Corte, Ramadorai a Sarno 2013).

Zcela zásadní význam má volatilitní riziková prémie při předvídání volatility pomocí opčních modelů jako je implikovaná volatilita z Black-Scholesova modelu (Black a Scholes 1973) či Model-Free volatilita (Britten-Jones a Neuberger 2000). Tyto modely odvozují, za pomocí bez-arbitrážních vztahů, z aktuálních tržních cen opcí, jakou volatilitu očekávají účastníci trhu do budoucna. Na rozdíl od ekonometrických modelů volatility vycházejících z historických časových řad (EWMA, GARCH, ARFIMA-RV, HAR-RV) pracují opční modely přímo s očekáváním trhu a vycházejí tak z širšího souboru informací v důsledku čehož by měly poskytovat i lepší predikce (Figlewski 2004).

Jejích problémem však je, že předpokládají rizikovou neutralitu investorů k volatilitnímu riziku a nezohledňují tak volatilitní rizikovou prémii obsaženou v cenách opcí. V důsledku toho tyto modely systematicky nadhodnocují volatilitu očekávanou investory do budoucna a spolu s tím i následnou realizovanou volatilitu (Bakshi a Kapadia 2003, Fičura 2013).

Cílem výzkumu je vytvořit lineární regresní model pro odhad volatilitní rizikové prémie ex-ante a následně ukázat, zda použitím takto odhadnuté prémie při předvídání volatility lze zvýšit předpovědní sílu opčních modelů volatility. Výzkum byl realizován na časové řadě měnového kurzu EUR/USD v období od 3.2.2006 do 16.5.2014. Volatilitní rizikovou prémii zde lze chápat jako cenu zajištění se proti nárůstu volatility tohoto měnového kurzu.

Zbytek práce je organizován následovně. V první kapitole vysvětlíme ekonomický původ rizikových prémií. Druhá kapitola popisuje metodologii použitou pro odhad historické volatility, třetí kapitola metodologii pro odhad volatilitní rizikové prémie, načež v čtvrté kapitole následuje empirický výzkum, zabývající se odhadem volatilitní rizikové prémie a předvídáním volatility měnového kurzu EUR/USD. V závěru jsou shrnuty hlavní výsledky provedeného výzkumu.

1. Ekonomické vysvětlení rizikových prémií

Vycházíme z předpokladu, že se ekonomické subjekty snaží maximalizovat svůj očekávaný užitek v souladu s teorií rozhodování za rizika Johna Von Neumanna a Oskara Morgensterna (1953). Zároveň uvažujeme, že jsou všichni investoři rizikově averzní, což lze v souladu s výše zmíněnou teorií vysvětlit tím, že jejich užitkové funkce jsou konkávní (pro $U: X \rightarrow \mathrm{R}$ platí, že $\frac{\partial^2 U(x)}{\partial x^2} < 0$).

Pro začátek se omezíme pouze na 2 existující aktiva, z nichž první je bezrizikové aktivum s výnosností R_f a rozptylem $D(R_f) = 0$ a druhé rizikové aktivum s očekávanou výnosností $E(R_r)$ a rozptylem $D(R_r) > 0$. Pokud by v takové situaci platilo, že se očekávané výnosy obou aktiv rovnají $E(R_r) = R_f$, muselo by dle Jensenovy nerovnosti pro všechny rizikově averzní investory platit, že $U(R_f) > U(E(R_r))$, a všichni by tak preferovali investici do bezrizikového aktiva před aktivem rizikovým $(R_f > E(R_r))$.

Přebytečná poptávka po bezrizikovém aktivu by vedla k růstu jeho ceny a přebytečná nabídka rizikového aktiva k poklesu jeho ceny, a to až do té doby, než by oba trhy nedospěly k rovnováze, při které musí platit, že očekávaná výnosnost rizikového aktiva je vyšší než výnosnost bezrizikového aktiva: $E(R_r) > R_f$.

Tržní rizikovou prémii RP_r můžeme definovat jako nadměrnou výnosnost rizikového aktiva oproti aktivu bezrizikovému (při rovnovážných cenách obou aktiv):

$$RP_r = E(R_r) - R_f \tag{1}$$

Výše zmíněná teorie dále implikuje, že pokud by pro dvě aktiva platilo, že $D(R_1) > D(R_2)$, musí automaticky platit, že $E(R_1) > E(R_2)$ a tedy i $RP_1 > RP_2$. To však v praxi vždy platit nemusí. Na trhu se totiž neobchodují jen 2 aktiva, nýbrž velké množství různých aktiv, která investoři mohou ve svém portfoliu kombinovat s využitím korelačních vztahu mezi nimi. Každý investor se tak snaží nalézt určitou optimální kombinaci aktiv (optimální portfolium), která by mu zajišťovala z hlediska jeho rizikových preferencí maximální možný užitek.

Důsledky optimalizačního chování investorů, v prostřední, kdy je na trhu mnoho různých aktiv a investoři tak mohou diverzifikovat svá rizika, vysvětluje Moderní Teorie Portfolia (Markowitz 1952 a Sharpe 1964). Klíčovým poznatkem této teorie je, že očekávaná výnosnost jednotlivých aktiv nezávisí na jejich celkovém riziku (tedy na očekávané volatilitě jejich výnosů), ale jen na nediverzifikovatelné složce tohoto rizika. Ta závisí na hodnotě faktoru β, který vyjadřuje citlivost výnosů aktiva i na výnosech tržního portfolia a je možné ho odhadnout pomocí následující regresní rovnice (přímka SCL):

$$R_{i,t} - R_{f,t} = \alpha + \beta * (R_{M,t} - R_{f,t}) + \in_{i,t} \tag{2}$$

Kde $R_{i,t}$ jsou výnosy aktiva *i*, $R_{f,t}$ bezriziková úroková míra a $R_{M,t}$ výnosy tržního portfolia, neboli teoretického portfolia, které v důsledku diverzifikace dosahuje nejnižšího dosažitelného Sharpova ratia ($SR = \frac{E(R-R_f)}{\sigma_R}$, viz. Sharpe 1966), v praxi však často bývá aproximováno nějakým akciovým indexem (v USA obvykle S&P500).

Hodnota koeficientu α udává nadměrnou výnosnost aktiva *i* v minulosti (očekávaná hodnota α do budoucna je dle teorie efektivních trhů rovná nule), faktor β vyjadřuje závislost výnosů aktiva *i* na výnosech trhu a představuje míru systematického rizika, a volatilita reziduí $\in_{i,t}$ vyjadřuje míru specifického rizika, které je diverzifikovatelné a proto nijak neovlivňuje rizikovou prémii aktiva *i*.

Očekávanou výnosnost aktiva lze určit pomocí modelu CAPM:

$$E(R_i) = R_f + \beta * [E(R_M) - R_f] \tag{3}$$

Kde $E(R_i)$ je očekávaná výnosnost aktiva *i*, výraz $\beta * [E(R_M) - R_f]$ udává rizikovou prémii aktiva *i* a výraz $[E(R_M) - R_f]$ rizikovou prémii tržního portfolia, jehož očekávaná výnosnost je $E(R_M)$. Hodnota faktoru β nám sděluje, kolikanásobně je riziková prémie aktiva *i* vyšší nebo nižší oproti rizikové prémii tržního portfolia ($RP_i = \beta * RP_m$).

Faktor β lze dále vyjádřit též jako $\beta = \frac{Cov_{i,M}}{\sigma_M^2}$, či ekvivalentně jako $\beta = \rho_{i,M} \frac{\sigma_i}{\sigma_m}$. Vidíme tedy, že znaménko rizikové prémie aktiva *i* závisí na korelaci mezi výnosy tohoto aktiva a výnosy tržního portfolia ($\rho_{i,M}$) a že absolutní velikost této prémie závisí krom toho též na poměru volatility výnosů aktiva *i* ku volatilitě tržního portfolia $(\frac{\sigma_i}{\sigma_m})$. Platí tak, že v situaci, kdy je korelace výnosů aktiva a výnosů trhu záporná, pak i riziková prémie bude záporná a to o to více, o co vyšší je volatilita daného aktiva v porovnání s volatilitou tržního portfolia.

Aplikujeme-li Moderní Teorii Portfolia pro stanovení očekávané výnosnosti opce, je třeba vzít v potaz, že cena opce závisí na dvou stochasticky se vyvíjejících rizikových faktorech (potenciální třetí faktor, úrokovou míru, zde vynecháme, kvůli jejímu nízkému vlivu na cenu opce, viz Hull 2008). Těmito faktory jsou cena podkladového aktiva a její očekávaná volatilita do doby splatnosti opce.

Rizikovou prémii opce, vztahující se k riziku změny ceny podkladového aktiva, lze zapsat pomocí upravené verze modelu CAPM (Black a Scholes 1973):

$$RP_{P,S} = \frac{S}{P} * \Delta * \beta_S * \left[E(R_M) - R_f\right] \tag{4}$$

Kde $RP_{P,S}$ je riziková prémie opce, *S* je cena podkladového aktiva, *P* je cena opce, Δ je delta faktor opce ($\Delta = \frac{\partial P}{\partial S}$), a β_S je beta faktor podkladového aktiva.

Pro beta faktor opce tak platí vztah $\beta_P = \frac{S}{P} * \Delta * \beta_S$ a pro určení jeho znaménka je klíčová hodnota delty opce (Δ), která je pro call opci kladná (nabývá hodnot mezi 0 a 1), a pro put opci záporná (s hodnotami mezi 0 a -1). V případě dlouhé pozice v opci na akcii s kladnou beta by tak platilo, že beta faktor call opce (a spolu s ní i její riziková prémie) je kladný, zatímco beta faktor put opce (a její riziková prémie) je záporný. Call opce by tak obsahovala kladnou rizikovou prémii a put opce zápornou rizikovou prémii.

Druhým rizikovým faktorem, na kterém cena opce závisí, je volatilita ceny podkladového aktiva do doby splatnosti opce. Citlivost ceny opce na změny volatility udává faktor vega ($\vartheta = \frac{\partial P}{\partial \sigma}$). Vzhledem k tomu, že závislost ceny opce (call i put) je konvexní funkcí ceny podkladového aktiva (což je dáno tím, že vlastník opce je vystaven neomezenému potenciálnímu zisku, ale jen omezené ztrátě), závisí hodnota opce pozitivně na volatilitě a Vega faktor call opce i put opce je proto kladný. Nákupem kterékoliv opce tak spekulujeme na vzestup volatility ceny podkladového aktiva, zatímco při vypsání opce bychom spekulovali na její pokles. Volatilitní rizikovou prémii opce lze s využitím modelu CAPM zapsat jako:

$$RP_{P,V} = \frac{V}{P} * \vartheta * \beta_V * \left[E(R_M) - R_f\right] \qquad 5)$$

Kde $RP_{P,V}$ je volatilitní riziková prémie opce, V je očekávaná volatilita ceny podkladového aktiva, P je cena opce, ϑ je vega faktor opce ($\vartheta = \frac{\partial P}{\partial \sigma}$) a β_V je beta faktor volatility,

který je v důsledku záporné korelace mezi volatilitou většiny aktiv a výnosy tržního portfolia obvykle negativní, což implikuje zápornou volatilitní rizikovou prémii (pro dlouhou pozici v opci).

Investor do opcí je tak vystaven celkové rizikové prémii $RP_P = RP_{P,S} + RP_{P,V}$. Nejvyšších očekávaných výnosů by tak teoreticky měli dosahovat vypisovatelé put opcí na aktiva s kladnou beta, jelikož při takové investici jsou obě rizikové prémie kladné ($RP_{P,S} > 0$ a $RP_{P,V} > 0$). To potvrzuje výzkum v Bondarenko (2003) zabývající se nadměrnými výnosy při vypisování out-of-the-money put opcí na americký index S&P 500, zároveň však dospívá k tomu, že model CAPM není schopný plně vysvětlit pozorované nadměrné výnosy.

V případě, že by investor usiloval pouze o investici do volatility, pak je možné se expozice vůči riziku změny ceny podkladového aktiva do značné míry zbavit, vstupem do opčních pozic typu straddle, strangle, butterfly či condor, u kterých velikost zisku či ztráty závisí pouze na absolutní hodnotě změny ceny podkladového aktiva a nikoliv na směru této změny (pro rozbor základních opčních strategií viz Hull 2008). Vliv volatilitní rizikové prémie na výnosy opčních strategií typu straddle zkoumali Coval a Shumway (2001) a dospěli k závěru, že vypisovatelé straddle dosahují výrazně pozitivních očekávaných výnosů, což koresponduje s negativním znaménkem volatilitní rizikové prémie.

Eliminovat citlivost opční pozice na změny ceny podkladového aktiva je též možné pomocí dynamického delta hedgingu, při kterém investor udržuje pozici v opcích spolu s pozici v podkladovém aktivu v takovém poměru, aby výsledný delta faktor portfolia byl rovný nule. Historické výnosy delta-hedgovaných opčních portfolií zkoumali Bakshi a Kapadia (2003) a jejich výsledky opět potvrzují existenci výrazně záporné volatilitní rizikové prémie.

V neposlední řadě je možné pomocí opcí syntetizovat variance swap (Carr a Wu 2009), představující derivát u něhož zisk či ztráta závisí přímo na rozdílu mezi realizovaným rozptylem do doby splatnosti a počáteční swapovou sazbou, jejíž rovnovážná hodnota odpovídá Model-Free volatilitě implikované z cen opcí dle Britten-Jones a Neuberger (2000).

Očekávanou výnosnost variance swapu (vyjádřenou ku swapové sazbě, jelikož hodnota variance swapu je na počátku rovna nule) lze pomocí modelu CAPM zapsat následovně:

$$E\left[\ln\left(\frac{RV_{t,T}}{SV_{t,T}}\right)\right] = \alpha_V + \beta_V * \left[E\left(R_{M,t,T}\right) - R_{f,t,T}\right] \tag{6}$$

Kde $RV_{t,T}$ představuje realizovanou volatilitu v období od t do T, $SV_{t,T}$ rovnovážnou swapovou sazbu, α_V je alfa faktor volatility a β_V je beta faktor volatility.

V případě, že by volatilitní riziková prémie byla dána pouze modelem CAPM, pak by se $\alpha_V = 0$, a nadměrné výnosy variance swapů by bylo možné vysvětlit pouze na základě hodnoty faktoru β_V a rizikové prémie tržního portfolia $[E(R_{M,t,T}) - R_{f,t,T}]$.

Pro posouzení platnosti tohoto vztahu sestrojili Carr a Wu (2009) regresi ve tvaru:

$$\ln\left(\frac{RV_{t,T}}{SV_{t,T}}\right) = \alpha_V + \beta_V * \left[E\left(R_{M,t,T}\right) - R_{f,t,T}\right] + \epsilon_{V,t} \tag{7}$$

Tuto regresi aplikovali na historické výnosy syntetických variance swapů vztahujících se k volatilitě 5 různých akciových indexů a 35 individuálních akcií. Krom toho též autoři otestovali 2 upravené verze modelu CAPM (Kraus a Litzenberger 1976 a Fama a French 1993). Žádný z modelů však nedokázal zdaleka vysvětlit celý rozsah záporných výnosů syntetických variance swapů v minulosti a v regresních rovnicích tak vznikaly statisticky významné hodnoty koeficientů α_V (se záporným znaménkem), korespondující se zápornou volatilitní rizikovou prémií, vyšší, než jakou by implikoval model CAPM (Carr a Wu 2009). Pro původ volatilitní rizikové prémie tak je třeba hledat další možná vysvětlení.

2. Metodologie odhadu volatility a skoků

Ve zbytku práce budeme uvažovat, že logaritmus ceny zkoumaného aktiva vykonává proces definovaný následující stochastickou diferenciální rovnicí:

$$dp(t) = \mu(t)dt + \sigma(t)dW(t) + j(t)dq(t) \tag{8}$$

Kde $dp(t)$ je diferenciál logaritmu ceny aktiva, $\mu(t)$ je okamžitý drift rate, $\sigma(t)$ je okamžitá (spotová) volatilita, $dW(t)$ je diferenciál Wienerova procesu, $j(t)$ je proces determinující velikost skoků a $dq(t)$ proces představující indikátor skoků.

Logaritmickou výnosnost během stanovené periody o délce jeden časový interval (v našem případě jeden obchodní den) lze zapsat následovně:

$$r(t) = p(t) - p(t-1) = \int_{t-1}^{t} \mu(\tau)d\tau + \int_{t-1}^{t} \sigma(\tau)dW(\tau) + \sum_{t-1\leq\tau<t} \kappa(\tau) \tag{9}$$

Kde $\kappa(t) = j(t)I[q(t)=1]$ a suma $\kappa(t)$ měří kumulativní vliv skoků během dané periody.

Je-li délka zkoumané periody dostatečně malá, pak lze vliv podmíněné střední hodnoty zanedbat a můžeme psát:

$$r(t) = \int_{t-1}^{t} \sigma(\tau)dW(\tau) + \sum_{t-1\leq\tau<t} \kappa(\tau) \tag{10}$$

Celkovou variabilitu ceny během jedné periody lze pak vyjádřit pomocí kvadratické variace daného procesu v následujícím tvaru:

$$QV(t) = \int_{t-1}^{t} \sigma^2(s)ds + \sum_{t-1\leq s<t} \kappa^2(s) \tag{11}$$

Kde první člen představuje spojitou složku cenové variability nazývanou integrovaný rozptyl a druhý člen ne-spojitou složku cenové variability nazývanou skoková volatilita:

$$QV(t) = IV(t) + JV(t) \tag{12}$$

Vzhledem k tomu, že kvadratická variace, integrovaná volatilita i skoková volatilita jsou nepozorovatelné veličiny, je nutné je nějakým způsobem odhadnout.

Jedním z přístupů pro odhad stochastické volatility a její dekompozici na vliv spojité volatility a vliv skoků je využití bayesovských metod odhadu (viz Eraker a kol. 2003 či Witzany 2013).

Jinou možností je využít vysokofrekvenčních dat a z nich sestrojených neparametrických estimátorů, které při zkracování délky sub-intervalů pro jejich výpočet konvergují ke kvadratické varianci, případně k jednotlivým jejím složkám.

Nejčastěji používaným vysokofrekvenčním estimátorem kvadratické variace je realizovaná volatilita. Ta je pro určitou frekvenci definována jako součet čtverců logaritmických výnosů na určité vyšší frekvenci (Andersen a Bollerslev 1998). Pro odhad kvadratické variace za jeden den tak lze použít například součet čtverců logaritmických výnosů ze všech 15timinutových intervalů v daném dni. Se zvyšováním jemnosti dělení (snižováním délky intervalů a zvyšováním jejich počtu) realizovaná volatilita konverguje ke kvadratické variaci a představuje její nestranný a konzistentní odhad (Andersen a kol. 2005).

Definujeme-li r(t,Δ) jako logaritmický výnos za období t - Δ až t, pak můžeme realizovanou volatilitu během stanovené periody zapsat jako:

$$RV(t,\Delta) = \sum_{j=1}^{1/\Delta} r^2(t-1+j\Delta,\Delta) \tag{13}$$

Přičemž platí, že $RV(t,\Delta) \rightarrow QV(t)$ když $\Delta \rightarrow 0$.

Praktickým problémem při použití realizované volatility je vliv efektů tržní mikrostruktury, které na velmi vysokých frekvencích (tick, sekunda, minuta, atd.) způsobují, že logaritmické výnosy aktiva vykazují silnou negativní autokorelaci, což vede k nadhodnocování kvadratické variace (Andersen a kol. 2005). Řešením tohoto problému je buď logaritmické výnosy na těchto frekvencích o výše zmíněný efekt očistit, pro což byla vytvořena celá řada metod (viz Zhang, Mykland a Ait-Sahalia 2005), nebo použít frekvence nižší (typicky 5-30 minut, v závislosti na likviditě daného aktiva), na kterých je autokorelace logaritmických výnosů statisticky nevýznamná.

Dalším problémem je rozklad kvadratické variace na její spojitou a nespojitou složku (integrovaný rozptyl a skokovou volatilitu). Ten může být vhodné provést jak z toho důvodu, že obě složky disponují odlišnou dynamikou, čehož lze využít při předvídání volatility (Andersen a kol. 2003, Lanne 2006, Corsi a kol. 2008), tak také kvůli odlišnému vlivu skokové volatility na volatilitní rizikovou prémii (Todorov 2009 či Chen a Poon 2013).

Krom již zmiňovaných bayesovských metod (MCMC algoritmus, Efficient method of moments, atd.) lze pro rozklad volatility na její spojitou a nespojitou složku opět použít vysoko-frekvenčních dat a různých neparametrických estimátorů. Tentokrát však takových, které konvergují pouze ke spojité složce kvadratické variace, tedy k integrovanému rozptylu. Nespojitou složku kvadratické variace (skokovou volatilitu) pak snadno odhadneme jako rozdíl mezi realizovanou volatilitou a odhadnutým integrovaným rozptylem.

Nejčastěji používaným estimátorem konvergujícím k integrovanému rozptylu je realized bipower variation (Barndorff-Nielsen a Shephard 2004) definována následovně:

$$BV(t,\Delta) = \frac{\pi}{2} \sum_{j=2}^{1/\Delta} |r(t-1+j\Delta,\Delta)||r(t-1+(j-1)\Delta,\Delta)| \tag{14}$$

Přičemž platí, že BV(t,Δ) → IV(t), když Δ → 0.

Vzhledem k tomu, že realized bipower variation využívá absolutní logaritmické výnosy za po sobě následující periody, dochází při zvyšování jemnosti dělení (zkracování délky intervalů směrem k nule a růstu jejich počtu směrem k nekonečnu) k eliminaci nespojité složky cenové variability a realized bipower variation konverguje k integrovanému rozptylu.

Kumulativní realizovaný vliv skoků během stanovené periody lze pak snadno vyjádřit jako:

$$RJV(t,\Delta) = RV(t,\Delta) - BV(t,\Delta) \tag{15}$$

Přičemž platí, že $RJV(t,\Delta) \rightarrow \Sigma_{t-1\leq s<t}\, \kappa^2(s)$, když Δ → 0.

Nevýhodou bipower variation je, že při snižování Δ nekonverguje k integrovanému rozptylu dostatečně rychle a může tak jeho hodnotu značně zkreslovat (Corsi a kol. 2008). Pro dosažení rychlejší konvergence proto někteří autoři (Ysusi 2006, Corsi a kol. 2008, Shi 2009) navrhují použít multi-power-variation vyšších řádů, jako je realized tripower variation:

$$TV(t,\Delta) = \frac{\pi^{3/2}}{4\Delta}\Gamma\left(\frac{7}{6}\right)^{-3} \sum_{j=3}^{1/\Delta} |r(t-1+j\Delta,\Delta)|^{4/3}|r(t-1+(j-1)\Delta,\Delta)|^{4/3}|r(t-1+(j-2)\Delta,\Delta)|^{4/3} \tag{16}$$

Kdy opět platí, že TV(t,Δ) → IV(t), když Δ → 0.

Případně je též možné použít estimátory založené na nearest neighbour truncation jako jsou Min-RV či Med-RV (Andersen, Dobrev, Schaumburg 2010)

Vzhledem k tomu, že při praktických aplikacích Δ není zpravidla dostatečně blízká nule, je použití kteréhokoliv z výše zmíněných estimátorů zatíženo určitou statistickou chybou. V důsledku toho je obvykle identifikováno velké množství malých skoků prakticky každý den a v některých dnech může vyjít hodnota celkového vlivu skoků dokonce záporná, což nemá žádnou ekonomickou interpretaci.

Obvykle se proto při výpočtu RJV(t,Δ) stanovuje určitá minimální hranice x (kdy x ≥ 0) a ve zbylých dnech se vliv skoků zanedbává.

V případě, že x = 0, je možné RJV(t,Δ) určit s využitím BV(t,Δ) jako:

$$RJV(t,\Delta) = \max\{RV(t,\Delta) - BV(t,\Delta), 0\} \tag{17}$$

Sofistikovanější metodu pro očištěni realized bipower variation o vliv malých skoků, které by mohly být potenciálně chybně identifikované, vynalezli Andersen, Bollerslev a Diebold (2007). Tato metoda vychází z tzv. shrinkage estimátoru, kdy pomocí RV(t,Δ), BV(t,Δ) a TV(t,Δ) definujeme asymptoticky standardně normálně rozdělenou veličinu Z(t,Δ):

$$Z(\mathrm{t},\Delta) = \frac{[\mathrm{RV}(\mathrm{t},\Delta) - BV(\mathrm{t},\Delta)]\mathrm{RV}(\mathrm{t},\Delta)^{-1}}{\sqrt{[(\pi/2)^2 + \pi - 5]\max\{1, TV(\mathrm{t},\Delta)BV(\mathrm{t},\Delta)^{-2}\}\Delta}} \tag{18}$$

Statistické významné skoky na hladině významnosti α je pak možné identifikovat jako:

$$RJV(t,\Delta) = I\{Z(t,\Delta) > \Phi(\alpha)^{-1}\}\,[RV(t,\Delta) - BV(t,\Delta)] \tag{19}$$

Kde I {.} představuje indikátorovou funkci a $\Phi(\alpha)^{-1}$ kvantilovou funkci normovaného normálního rozdělení.

Ať již skoky ve finančních časových řadách identifikujeme jakkoliv, četné studie ukazují, že okamžiky nastání skoků na sobě nejsou navzájem nezávislé, ale vykazují shlukování (viz Fulop, Li a Yu 2012). To ukazuje na proměnlivou intenzitu skoků (t.j. pravděpodobnost, že v určitém časovém intervalu nastane skok), kterou je možné určitým způsobem modelovat.

Jedním z možných způsobů, jak modelovat shlukování skoků, je za pomocí Hawkesova procesu s exponenciální funkcí odezvy, kdy intenzita skoků skokově narůstá vždy po nastání skoku a poté exponenciálně klesá zpět ke své dlouhodobé úrovni (Fulop, Li a Yu 2014).

Uvažujeme-li, že indikátor skoků $dq(t)$ v rovnici 8 vykonává Hawkesův proces s exponenciální funkcí odezvy, pak intenzita skoků $\lambda(t)$, definována vztahem $Pr[dq(t) = 1] = \lambda(t)dt$, je dána procesem, který je ve vztahu k procesu $dq(t)$ deterministický:

$$d\lambda(t) = \kappa[\Theta - \lambda(t)]dt + \eta dq(t) \tag{20}$$

Kde $d\lambda(t)$ je diferenciál intenzity skoků, Θ dlouhodobá úroveň intenzity skoků, κ parametr určující sílu mean-reverze a η je parametr určující velikost navýšení intenzity skoků v případě, že nastane skok.

Řešením předchozí diferenciální rovnice lze získat vztah pro intenzitu skoků v čase *t*:

$$\lambda(t) = \theta + \int_{-\infty}^{t} \eta e^{-\kappa(t-s)} dq(s) = \theta + \sum_{dq(s)=1, s\le t} \eta e^{-\kappa(t-s)} \tag{21}$$

Zavedeme-li zjednodušující předpoklad, že v jednom dni může nastat maximálně jeden skok, pak lze výše zmíněný proces převést do diskrétního času a zapsat jej prostřednictvím diferenční rovnice ve tvaru:

$$\lambda(t) = \alpha + \beta\lambda\,(t - 1) + \gamma J\,(t - 1) \tag{22}$$

Kde $\lambda(t)$ je intenzitu skoků v čase t, α udává dlouhodobou intenzitu skoků $\alpha = (1\text{-}\beta)\ \Theta$, parametr β určuje tempo, kterým intenzita skoků klesá zpět ke své dlouhodobé úrovni ($0 \le \beta < 1$), γ je parametr určující navýšení intenzity skoků v případě, že v předchozí periodě nastal skok a J(t - 1) je proměnná nabývající hodnot 1 nebo 0 v závislosti na tom zda v periodě t - 1 nastal skok či ne.

3. Metodologie odhadu volatilitní rizikové prémie

Volatilitní rizikovou prémii lze vyjádřit třemi různými způsoby: ve vztahu k tržní ceně opce, ve vztahu k očekávané výnosnosti opce, či ve vztahu k očekávané volatilitě. Vzhledem k zaměření tohoto článku na oblast předvídání volatility budeme ve zbytku práce uvažovat volatilitní rizikovou prémii vyjádřenou ve vztahu k očekávané volatilitě, a to jako rozdíl mezi očekávanou volatilitou při fyzické pravděpodobnostní míře a očekávanou volatilitou při rizikově neutrální pravděpodobnostní míře (Todorov 2009):

$$VP\,(t + 1|F_t) = E^P\,[QV\,(t + 1)|F_t] - E^Q\,[QV\,(t + 1)|F_t] \tag{23}$$

Kde $VP\,(t + 1|F_t)$ je volatilitní riziková prémie pro následující období, QV (t + 1) je kvadratická variace v periodě t + 1, E^P je očekávání při fyzické pravděpodobnostní míře, E^Q očekávání při rizikově neutrální pravděpodobnostní míře a F_t filtrace do času t, vyjadřující množinu dostupných informací v daném čase. Vzhledem k tomu, že očekávání volatility při pravděpodobnostních mírách P a Q neznáme, je třeba je nějakým způsobem odhadnout.

Očekávanou volatilitu při rizikově-neutrální pravděpodobnostní míře ($E^Q\,[QV\,(t + 1)|F_t]$) lze odvodit na základě bez-arbitrážních vztahů z aktuálních tržních cen opcí za pomocí Model-free volatility (Britten-Jones a Neuberger 2000), která zároveň odpovídá rovnovážné sazbě variance swapu (Carr a Wu 2009). Volatilitní rizikovou prémii vyjádřenou rovnicí 23 lze pak dát do souvislosti s očekávanou výnosností variance swapu.

Jinou možností je použít implikovanou volatilitu z Black-Scholesova modelu oceňování opcí (1973). Problémem tohoto modelu je však jeho předpoklad, že cena podkladového aktiva vykonává geometrický Brownův pohyb s konstantní volatilitou, což implikuje normální rozdělení výnosů, což vede k podhodnocování pravděpodobnosti extrémních cenových pohybů. To způsobuje, že B-S model podhodnocuje opce s realizační cenou daleko od stávající tržní ceny, což vede na měnových trzích k efektu známému jako volatility smile, kdy implikovaná volatilita in-the-money a out-of-the money opcí je vyšší než implikovaná volatilita at-the-money opcí. Na akciových trzích vstupuje do hry navíc ještě leverage efekt, který způsobuje, že podhodnocené jsou zejména opce s nižší realizační cenou než je aktuální tržní cena, což u implikované volatility způsobuje efekt známý jako volatility smirk, či volatility skew (viz Hull 2008).

Model-free volatilita naproti tomu nepředpokládá žádný konkrétní proces pro vývoj ceny podkladového aktiva a je teoreticky platná jak pro celou řadu spojitých stochastických procesů (jak dokázali Britten-Jones a Neuberger 2000) tak i pro velkou skupinu procesů obsahujících skoky (jak dokázali Jiang a Tian 2005). Model-free volatilita též na rozdíl od B-S implikované volatility nevychází pouze z ceny jedné vybrané opce, nýbrž z tržních cen všech opcí při dané splatnosti a využívá tak širšího souboru informací.

Vzorec pro odvození Model-free volatility je následující (Jiang a Tian 2005):

$$E_0^F\left[\int_0^T \left(\frac{dF_t}{F_t}\right)^2\right] = 2\int_0^\infty \frac{C^F(T,K) - \max(0, F_0 - K)}{K^2}\, dK \tag{24}$$

Kde C^F (T,K) značí forwardovou cenu opce s maturitou v čase T a realizační cenou K, takže C^F (T,K) = C (T,K) / B (T,t), kde B (T,t) je cena bondu v čase t, který vyplatí jeden dolar v čase T. Dále F_t značí forwardovou cenu aktiva v čase t, se splatností v čase T a E_0^F značí očekávání při rizikově neutrální forwardové pravděpodobnostní míře (T--Forward measure).

Ze vzorce vidíme, že očekávaná kvadratická variace při rizikově neutrální pravděpodobnostní míře je dána integrálem rozdílů mezi forwardovými cenami opcí a jejich forwardovou vnitřní hodnotou, kdy integrál je počítán přes celé kontinuum možných strike price. Hlavním problémem Model-free volatility je, že v praxi nejsou k dispozici tržní ceny opcí při celém kontinuu realizačních cen, ale vždy jen pro několik málo realizačních cen v okolí aktuální tržní ceny podkladového aktiva. Pro dopočtení zbylých cen opcí je proto nutné použít interpolaci a extrapolaci. V rámci této práce je použita metodologie vypracovaná v Jiang a Tian (2005), kdy z dostupných cen out-of-the-money call a put opcí nejprve spočítáme implikované volatility pomocí Black-Scholesova modelu, ty interpolujeme kubickou spline funkcí pro sestrojení volatility smilu, načež z hodnot tohoto smilu zpětně dopočteme ceny všech opcí, které potřebujeme pro numerický výpočet integrálu ve vzorci 24.

Zejména extrapolace volatility smilu, jakož i nízká vypovídací schopnost tržních cen opcí, které jsou na jeho okraji (Andersen a Bondarenko 2007), může vést k tomu, že Model-free volatilita nepodává zcela přesný odhad očekávané budoucí volatility při rizikově neutrální pravděpodobnostní míře. Ve zbytku práce však budeme od tohoto zkreslení abstrahovat:

$$E^Q [QV(t+1)|F_t] \cong MFV(t+1|t) \qquad (25)$$

Kde $MFV(t+1|t)$ představuje Model-free volatilitu odvozenou v čase t pro čas $t+1$.

Pro odhad očekávané volatility při fyzické pravděpodobnostní míře ($E^P [QV(t+1)|F_t]$) ve vzorci 25 lze použít několik různých metod. Usilujeme-li o odhad volatilitní rizikové prémie ex-post, pak je možné využít toho, že očekávaná volatilita při fyzické pravděpodobnostní míře poskytuje nevychýlený odhad následné realizované volatility a tuto volatilitu tak je možné zpětně využít pro odhad volatilitní rizikové prémie. Rovnice 23 se tak změní na:

$$RVP(t+1) = RV(t+1) - MFV(t+1|t) \qquad (26)$$

Kde $RVP(t+1)$ je ex-post odhad volatilitní rizikové prémie v čase $t+1$, vycházející z realizované volatility $RV(t+1)$ v čase $t+1$ a Model-free volatility $MFV(t+1|t)$ odvozené z cen opcí v čase t pro čas $t+1$. Výraz $RVP(t+1)$ budeme dále označovat též jako realizovaná volatilitní prémie.

Tímto způsobem je možné získat nevychýlený odhad volatilitní rizikové prémie ex-post. Statistická chyba tohoto odhadu je však značná, jelikož očekávání volatility při fyzické pravděpodobnostní míře nahrazujeme její skutečnou realizací, která je zatížená realizací náhodné složky. Tuto metodu též nelze použít pro odhad volatilitní rizikové prémie ex-ante, jelikož realizovaná volatilita $RV(t+1)$ je dostupná až v čase $t+1$. Výraz $RVP(t+1)$ proto v empirické části práce nebude použit jako vysvětlující proměnná, nýbrž jako cílová proměnná, kterou se pomocí jiných vysvětlujících proměnných pokusíme předvídat.

Obvykle používanou metodou pro odhad volatilitní rizikové prémie ex-ante (Todorov 2009), je nahradit výraz $E^P [QV(t+1)|F_t]$ v rovnici 23 výrazem $E^P [QV(t+1)|\Im_t]$, kde F_t je soubor všech informací dostupných v čase t, a $\Im_t$ soubor všech informací dostupných v historickém vývoji zkoumané časové řady (platí tedy, že $\Im_t \in F_t$).

Volatilitní rizikovou prémii je pak možné odhadnout jako:

$$EVP(t+1|t) = E^P[QV(t+1)|\mathfrak{I}_t] - MFV(t+1|t) \quad (27)$$

Kde EVP (t + 1|t) představuje ex-ante odhad volatilitní rizikové prémie v čase t pro čas t + 1 a $E^P[QV(t+1)|\mathfrak{I}_t]$ je očekávaná volatilita při fyzické pravděpodobnostní míře, kterou lze stanovit na základě některého z ekonometrických modelů volatility (GARCH, ARFIMA-RV, HAR-RV, atd.) vycházejících z informační množiny $\mathfrak{I}_t$.

Výhodou tohoto přístupu je, že poskytuje odhad volatilitní rizikové prémie ex-ante a zároveň není zatížen tak velkou statistickou chybou, jako odhad s využitím rovnice 26. Jeho nevýhodou však je, že je závislý na použitém ekonometrickém modelu a že může v určitých chvílích poskytovat zkreslené odhady volatilitní rizikové prémie (jelikož $\mathfrak{I}_t \neq F_t$)

V empirické části práce se pokusíme o odhad volatilitní rizikové prémie ex-ante na základě lineární regrese, za pomocí série vhodně zvolených vysvětlujících proměnných. Použitá regresní rovnice má tvar:

$$RVP(t+1) = \alpha + \mathbf{X}(t)^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\beta} + \in_t \quad (28)$$

Kde levá strana (vysvětlovaná proměnná) vyjadřuje ex-post odhad realizované volatilitní prémie na základě rovnice 26, α představuje regresní konstantu, **β** vektor regresních parametrů, **X**(t) vektor vysvětlujících proměnných pro čas t a $\in_t$ reziduum v čase t.

Jako jedna z hlavních vysvětlujících proměnných ve vektoru **X** bude použit odhad volatilitní rizikové prémie ex-ante pomocí rovnice 27. Výraz $E^P[QV(t+1)|\mathfrak{I}_t]$ určíme na základě modelu ARFIMA-RV (Granger a Joyeux 1981), který představuje jeden z empiricky nejúspěšnějších modelů pro předvídání volatility (Pong a kol. 2004 či Fičura 2013), zejména kvůli své schopnosti zachytit dlouhou paměť v její autokorelační struktuře.

4. Modelování volatilitní prémie a volatility EUR/USD

Pro analýzu volatilitní rizikové prémie byla zvolena časová řada denních logaritmických výnosů měnového kurzu EUR/USD, v období od 3.2.2006 do 16.5.2014. Období bylo rozděleno na in-sample (od 3.2.2006 do 26.3.2010) a out-sample (od 26.3.2010 do 16.5.2014). In-sample období bylo použito pro odhad parametrů jednotlivých modelů a out-sample období pro vyhodnocení jejich předpovědních schopností.

Za cílovou veličinu při předvídání volatility byla zvolena realizovaná volatilita. V případě volatilitní rizikové prémie je cílovou veličinou realizovaná volatilitní riziková prémie vypočtená na základě rozdílu Model-Free volatility a realizované volatility. Jedná se tedy o převrácenou hodnotu vztahu dle vzorce 26. Model-Free volatilita byla vypočtena z dat opcí s týdenní splatností dostupných z terminálu Reuters Eikon. Realizovaná volatilita byla vypočtena na základě 15minutových logaritmických výnosů dostupných z datového centra firmy MetaQuotes. 15min frekvence byla zvolena proto, že na 5min a 1min frekvencích vykazovaly výnosy příliš silnou autokorelaci, což by mohlo nepříznivě ovlivnit konvergenci realizované volatility ke kvadratické variaci (Andersen a kol. 2005).

Veškeré odhady parametrů byly realizovány v programu Matlab, s výjimkou modelu ARFIMA-RV, jehož parametry byly odhadnuty v programu Cronos.

Vzhledem k tomu, že predikce realizované volatility na základě modelů časových řad budou hrát významnou roli při konstrukci některých vysvětlujících proměnných pro odhad volatilitní rizikové prémie, je nejprve třeba vybrat vhodný ekonometrický model pro předvídání realizované volatility. K tomuto účelu byly otestovány modely GARCH (Bollerslev 1986), ARFIMA-RV (Granger a Joyeux 1981) a HAR-RV (Corsi 2004), z nichž modely ARFIMA-RV a HAR-RV vycházejí přímo z realizované volatility a dokážou též modelovat její dlouhou paměť, na rozdíl od modelu GARCH, který vychází z denních výnosů a předpokládá jen krátkou paměť v autokorelační struktuře volatility. Výsledky ekonometrických modelů jsme též porovnali se dvěma modely vycházejícími z tržních cen opcí (Black-Scholesova implikovaná volatility a Model-Free volatilita), prozatím bez úpravy o vliv volatilitní prémie.

Tabulka 1 zobrazuje koeficienty determinace (R-Squared) jednotlivých testovaných modelů v období in-sample i out-sample.

Tabulka 1 - R-Squared jednotlivých modelů pro předvídání volatility

	GARCH	ARFIMA	HAR	BS-IV	MFV
In-Sample	0,5766	0,6530	0,6486	0,6025	0,6316
Out-Sample	0,4096	0,5110	0,4956	0,3595	0,3734

Z Tabulky 1 je patrné, že výsledky všech modelů v out-sample období jsou výrazně horší než v in-sample období. Jednoznačně nejúspěšnější v obou obdobích je přitom model ARFIMA. Propad předpovědních schopností v out-sample období je zcela pochopitelný u ekonometrických modelů, jejichž parametry byly odhadnuty na datech z období in-sample. V případě opčních modelů jsme však s žádným odhadem parametrů v in-sample období nepracovali a zhoršení jejich výsledků v out-sample období je proto překvapivé. Potenciálně by však mohlo souviset s proměnlivých charakterem volatilitní rizikové prémie.

Prozkoumáme proto, zda jsou predikce jednotlivých modelů vychýlené, což lze v případě opčních modelů dávat do souvislosti s působením volatilitní rizikové prémie.

Pro posouzení míry zkreslení predikcí jednotlivých modelů byla sestrojena Mincer-Zarnowitz regression (Mincer a Zarnowitz 1969) definována následovně:

$$y_{t+1} = \alpha + \beta\hat{y}_{t+1|t} + \in_{t+1} \quad (29)$$

Kde y_{t+1} je realizovaná volatilita v čase t + 1, a $\hat{y}_{t+1|t}$ je předpověď této volatility vygenerovaná některým z testovaných modelů v čase t.

Jedná se tedy o regresi, kde vysvětlující proměnnou je určitá předpověď volatility a vysvětlovanou proměnnou následná realizovaná volatilita. V případě, že by predikce daného modelu byly nezkreslené, měl by koeficient α vyjít statisticky nevýznamně odlišný od nuly ($\alpha \cong 0$) a koeficient beta přibližně rovný jedné ($\beta \cong 1$). Výsledky Minzer-Zarnowitz regression pro in-sample období zobrazuje Tabulka 2.

Tabulka 2 - Výsledky Mincer-Zarnowitz regression pro in-sample období

	GARCH	ARFIMA	HAR	BS-IV	MFV
α coeff	**-4,04E-06**	**8,86E-07**	**2,56E-06**	**4,69E-06**	**3,74E-06**
α t-stat	-2,2190	0,5779	1,6865	3,2525	2,5741
α p-value	0,0267	0,5635	0,0920	0,0012	0,0102
β coeff	**1,1229**	**0,9905**	**0,9673**	**0,7857**	**0,8320**
β t-stat	37,6205	43,5444	43,2126	44,7767	44,8121
β p-value	3,83E-194	9,24E-234	1,40E-231	8,19E-242	4,83E-242

Z výsledků provedené regrese vyplývá, že za nevychýlené (v in-sample období) lze označit pouze předpovědi modelu ARFIMA a do určité míry též modelu HAR.

V případě modelu GARCH je koeficient α záporný a statisticky významně odlišný od nuly, a koeficient β je výrazně vyšší než 1. Predikce modelu tedy nejsou nevychýlené, vzhledem k opačnému směru působení obou koeficientů však nelze jednoznačně říct, zda model volatilitu systematicky nadhodnocuje či podhodnocuje.

V případě opčních modelu (BS-IV a MFV) vyšel koeficient α kladný a statisticky významně odlišný od nuly, zatímco koeficient β vyšel výrazně nižší než 1. Opět je tedy směr působení obou koeficientů protisměrný. Vzhledem k relativně nízkým hodnotám koeficientů beta je však pravděpodobné, že modely volatilitu spíše nadhodnocují (a to nejvíce ve chvíli kdy je vysoká), což potvrdila i podrobná analýza jejich reziduí.

Toto nadhodnocování realizované volatility ze strany opčních modelů je způsobeno existencí volatilitní rizikové prémie a proto je vhodné predikce těchto modelů o hodnotu této prémie upravit.

Nejjednodušším způsobem, jak se s vlivem volatilitní rizikové prémie vypořádat, je upravit predikce opčních modelů za pomocí koeficientů získaných z Minzer-Zarnowitz regression. Tabulka 3 zobrazuje výsledky opčních modelů po úpravě.

Tabulka 3 - R-Squared jednotlivých modelů po úpravě o volatilitní prémii

	GARCH	ARFIMA	HAR	BS-IV	MFV
In-Sample	0,5766	0,6530	0,6486	0,6657	0,6660
Out-Sample	0,4096	0,5110	0,4955	0,5169	0,5013

Z tabulky vidíme, že koeficienty determinace obou opčních modelů se po úpravě výrazně zvýšily a že předpovědní síla těchto modelů je nyní srovnatelná s modelem ARFIMA-RV. Zajímavé též je, že model BV-IV dosáhl v obou obdobích lepších výsledků než model MFV. Při předvídání volatilitní prémie však přesto raději použijeme model MFV, jelikož rozdíly mezi výsledky obou modelů jsou jen malé a model MFV je teoreticky správnější.

Zdá se tedy, že opční modely dokážou poskytovat relativně přesné predikce realizované volatility (srovnatelné s nejlepšími ekonometrickými modely), jsou-li upraveny o vliv volatilitní rizikové prémie. Je však zřejmě, že výše zmíněný způsob úpravy na základě lineární regrese nedokáže plně vystihnout skutečnou dynamiku volatilitní prémie.

V následující části se proto pokusíme vytvořit lineární regresní model (dle rovnice 28), který by umožňoval velikost volatilitní prémie modelovat za pomocí série vhodně zvolených vysvětlujících proměnných. Jako potenciální proměnné budou použity následující veličiny:

1) Zpožděné hodnoty realizované volatilitní prémie odhadnuté ex-post, jako rozdíl mezi predikovanou Model-Free volatilitou a následnou realizovanou volatilitou (obrácený vztah z rovnice 26). Krom zpožděných hodnot byly jako vysvětlující proměnné použity též průměrné hodnoty této prémie za poslední týden (5 dní), dva týdny (10 dní) a měsíc (24 dní). Cílem použití výše zmíněných proměnných je zachytit autokorelaci ve vývoji volatilitní prémie.

2) Ex-ante odhad volatilitní rizikové prémie sestrojený na základě rozdílu mezi predikcí volatility dle modelu MFV (bez úpravy o vliv volatilitní prémie) a predikcí sestrojenou na základě modelu ARFIMA-RV (viz rovnice 27). Jako vysvětlující proměnná byla dále použita i změna takto odhadnuté volatilitní

prémie. Alternativně bylo též pracováno s modelem BS-IV namísto MFV, výsledky však byly velmi podobné a tak je zde neuvádíme.

3) Úroveň volatility stanovená na základě zpožděných hodnot realizované volatility, bipower variation, jakož i aktuálních predikcí ze strany modelů MFV a ARFIMA-RV. Tyto proměnné byly zařazeny jak z důvodu možné závislosti mezi úrovní volatility a velikostí volatilitní prémie, tak také kvůli vlivu úrovně volatility na rozdělení výnosů volatility a jejich šikmost, u které lze předpokládat, že volatilitní prémii ovlivňuje.

4) Změna volatility stanovené pomocí zpožděných hodnot RV a BV, jakož i aktuálních predikcí MFV a ARFIMA-RV. Cílem této skupiny proměnných je zachytit vliv velkých změn (potenciálních skoků) ve volatilitě na výši volatilitní prémie.

5) Volatilita volatility (RV, BV, MFV i ARFIMA-RV) predikovaná na základě modelu EWMA (z důvodu jeho jednoduchosti a univerzálnosti) s periodou 5, 10 a 24 period, kdy parametr α pro výpočet EWMA určujeme dle standardně používaného vzorce $\alpha = 2 / (n + 1)$. Ve finální aplikaci jsou dále výsledky jen pro predikovaný rozptyl volatility, v průběhu výzkumu však byl otestován i vliv predikované směrodatné odchylky a výsledky byly podobné.

6) Zpožděné hodnoty skoků identifikovaných na základě rozdílu realizované volatility a bipower variation po odstranění záporných hodnot dle vzorce (17), jakož i zpožděné hodnoty skoků identifikovaných pomocí shrinkage estimatoru (vzorec 19) při hladinách pravděpodobnosti 95%, 99% a 99,9%.

7) Odhadnutá intenzita skoků na základě Hawkesova procesu, kdy skoky byly identifikovány za pomocí shrinkage estimatoru při hladinách významnosti 95%, 99% a 99,9%.

Jako vysvětlující proměnná nebyla zařazena tržní riziková prémie akciového indexu (která je hlavní vysvětlující proměnnou v modelu CAPM) a to z toho důvodu, že se jedná o nepozorovanou veličinu ex-ante a pro ex-ante odhad volatilitní rizikové prémie ji tak nelze použít (bylo by nutné ji též odhadovat, což je spojeno s celou řadou komplikací).

Pro každou z potenciálních vysvětlujících proměnných byla nejprve odhadnuta jednorozměrná regrese, za účelem posouzení individuálního vlivu dané proměnné na velikost volatilitní rizikové prémie. Ve druhé fázi pak byla aplikována stepwise selection procedure pro výběr té kombinace vysvětlujících proměnných, která dokáže volatilitní rizikovou prémii předvídat co možná nejlépe v in-sample období. Získané proměnné pak byly použity pro odhad volatilitní rizikové prémie a predikce volatility v out-sample období.

Beta koeficienty všech jednorozměrných regresí, jejich t-hodnoty, p-hodnoty a koeficienty determinace zobrazuje Tabulka 4. Vzhledem k tomu, že tato část výzkumu slouží k posouzení teoretické vztahu mezi proměnnými a volatilitní prémii, byl odhad parametrů realizován na celém (full sample) období.

Z Tabulky 4 je patrné, že nejvyšší předpovědní schopnost (R-Squared ve výši 10,34%) má proměnná ERP (t|t - 1), neboli predikce volatilitní rizikové prémie ex-ante. Určitou předpovědní schopnost (avšak výrazně nižší) má i změna této prémie (Δ ERP (t|t - 1)).

Druhé nejvyšší R-squared (8,39%) dosáhla proměnná MFV (t|t - 1) udávající úroveň Model-Free volatility předvídanou pro čas t. O něco nižších hodnot R-Squared dosáhly i zbylé proměnné vztahují se k úrovni volatility (RV, BV, ARFIMA). U všech těchto proměnných jsou přitom odhadnuté regresní koeficienty kladné, což naznačuje na pozitivní vztah mezi volatilitou a volatilitní rizikovou prémií.

Vztah mezi změnou volatility a volatilitní rizikovou prémií se též ukázal být statisticky významný, avšak jen s nízkou předpovědní silou. Znaménka regresního koeficientu se zde navíc liší dle měřítka volatility, které zvolíme. Kladné hodnoty (kterou jsme původně očekávali) dosahuje pouze regresní koeficient pro (ΔMFV (t|t - 1)).

Výsledky též prokázaly relativně silný pozitivní vztah mezi minulým vývojem volatilitní prémie (ať již denním, týdenním či měsíčním) a její následnou hodnotou.

Pozitivní vztah mezi volatilitou volatility odhadnutou na základě EWMA a volatilitní rizikovou prémii byl též prokázán. Z výsledků jednorozměrné regrese však nelze říct, zda se nejedná jen o zdánlivý vztah způsobený pozitivní korelací mezi volatilitou volatility a úrovní volatility (to poznáme až z vícerozměrného modelu).

Proměnné vztahující se k historickým skokům též ovlivňují volatilitní rizikovou prémii pozitivně, což je v souladu s naším očekáváním. Předpovědní schopnost tohoto prediktoru je však překvapivě nízká. Navíc nejvyšších hodnot R-Squared dosahují odhadnuté skoky se zpožděním 2 a nikoliv 1, což je poněkud zarážející.

Vztah mezi odhadnutou itenzitou skoků a volatilitní rizikovou prémií je překvapivě negativní, což je v rozporu s naším očekáváním. Předpovědní schopnost tohoto prediktoru je však velmi nízká. Je tak možné, že nalezený vztah je jen důsledkem pozitivní korelace intenzity skoků s nějakou jinou veličinou, která rizikovou prémii ovlivňuje negativně.

Tabulka 4 - Beta koeficienty jednorozměrných regresí pro RVP(t) (Full-sample)

Vysvětlující proměnná	beta	t-value	p-value	R^2	Popis proměnné	Typ proměnné
Konstanta	0,0000	10,3800	0,0000	0,0000	Konstanta	Konstanta
RVP(t-1)	0,2003	9,3243	0,0000	0,0401	Zpožděná realizovaná vol. Prémie (1)	Zpožděné hodnoty realizované volatilitní prémie
RVP(t-2)	0,0408	1,8612	0,0629	0,0017	Zpožděná realizovaná vol. Prémie (2)	
RVP(t-3)	-0,0356	-1,6264	0,1040	0,0013	Zpožděná realizovaná vol. Prémie (3)	
RVP(week)	0,2999	7,3034	0,0000	0,0250	Realizovaná vol. Prémie za poslední týden	
RVP(2week)	0,3285	6,0686	0,0000	0,0174	Realizovaná vol. Prémie za poslední 2 týdny	
RVP(month)	0,6072	8,4871	0,0000	0,0335	Realizovaná vol. Prémie za poslední měsíc	
ERP(t|t-1)	0,5747	15,4930	0,0000	0,1034	Ex ante odhad volatilitní prémie	Ex-ante Vol.prémie
ΔERP(t|t-1)	0,2944	6,5761	0,0000	0,0204	Změna ex ante volatilitní prémie	
RV(t-1)	0,0897	6,6432	0,0000	0,0208	Zpožděná realizovaná volatilita	Proměnné popisující úroveň volatility
BV(t-1)	0,0981	6,5864	0,0000	0,0204	Zpožděná bipower variation	
ARFIMA(t|t-1)	0,1635	9,9517	0,0000	0,0454	Predikce volatility volatility dle ARFIMA	
MFV(t|t-1)	0,1833	13,8069	0,0000	0,0839	Predikce volatility dle MFV	
ΔRV(t-1)	-0,0946	-4,9705	0,0000	0,0117	Změna zpožděné realizované volatility	Proměnné popisující změny volatility
ΔBV(t-1)	-0,1138	-4,9811	0,0000	0,0118	Změna zpožděné bipower variation	
ΔARFIMA(t|t-1)	-0,3256	-5,4453	0,0000	0,0140	Změna volatility predikované dle ARFIMA	
ΔMFV(t|t-1)	0,1173	2,5235	0,0117	0,0031	Změna volatility predikované dle MFV	
EWMA((ΔRV(t-1)^2),5)	1211,2771	8,4098	0,0000	0,0329	Volatilita zpožď. realizované volatility (5)	Proměnné popisující volatilitu volatility (vypočtená na základě EWMA)
EWMA((ΔBV(t-1)^2),5)	1685,2257	7,5114	0,0000	0,0264	Volatilita zpožď. bipower variation (5)	
EWMA((ΔARFIMA(t|t-1)^2),5)	10510,1596	7,6384	0,0000	0,0273	Volatilita volatility dle ARFIMA (5)	
EWMA((ΔMFV(t|t-1)^2),5)	5605,0885	7,9818	0,0000	0,0297	Volatilita volatility dle MFV (5)	
EWMA((ΔRV(t-1)^2),10)	1683,2205	9,6942	0,0000	0,0432	Volatilita zpožď. realizované volatility (10)	
EWMA((ΔBV(t-1)^2),10)	2335,0352	8,9331	0,0000	0,0369	Volatilita zpožď. bipower variation (10)	
EWMA((ΔARFIMA(t|t-1)^2),10)	15206,1086	9,1190	0,0000	0,0384	Volatilita volatility dle ARFIMA (10)	
EWMA((ΔMFV(t|t-1)^2),10)	6671,2848	8,2925	0,0000	0,0320	Volatilita volatility dle MFV (10)	
EWMA((ΔRV(t-1)^2),24)	2167,5691	10,2390	0,0000	0,0480	Volatilita zpožď. realizované volatility (24)	
EWMA((ΔBV(t-1)^2),24)	3011,9979	9,7223	0,0000	0,0434	Volatilita zpožď. bipower variation (24)	
EWMA((ΔARFIMA(t|t-1)^2),24)	20267,8984	9,9267	0,0000	0,0452	Volatilita volatility dle ARFIMA (24)	
EWMA((ΔMFV(t|t-1)^2),24)	8487,5950	8,7007	0,0000	0,0351	Volatilita volatility dle MFV (24)	
RJV(t-1,0%)	0,2566	3,5555	0,0004	0,0060	Zpožděné skoky dle max(BV-RV,0) (1)	Proměnné vztahující se k historickým realizovaným skokům
RJV(t-2,0%)	0,5419	7,5889	0,0000	0,0269	Zpožděné skoky dle max(BV-RV,0) (2)	
RJV(t-3,0%)	0,5030	7,0305	0,0000	0,0232	Zpožděné skoky dle max(BV-RV,0) (3)	
RJV(t-1,95%)	0,2124	2,7505	0,0060	0,0036	Zpožděné skoky shrinkage est. (95%)(1)	
RJV(t-2,95%)	0,3609	4,6892	0,0000	0,0105	Zpožděné skoky shrinkage est. (95%)(2)	
RJV(t-3,95%)	0,2401	3,1104	0,0019	0,0046	Zpožděné skoky shrinkage est. (95%)(3)	
RJV(t-1,99%)	0,1485	1,7653	0,0777	0,0015	Zpožděné skoky shrinkage est. (99%)(1)	
RJV(t-2,99%)	0,3775	4,5066	0,0000	0,0097	Zpožděné skoky shrinkage est. (99%)(2)	
RJV(t-3,99%)	0,1440	1,7122	0,0870	0,0014	Zpožděné skoky shrinkage est. (99%)(3)	
RJV(t-1,999%)	-0,2001	-1,5684	0,1169	0,0012	Zpožděné skoky shrinkage est. (99,9%)(1)	
RJV(t-2,999%)	0,1399	1,0964	0,2730	0,0006	Zpožděné skoky shrinkage est. (99,9%)(2)	
RJV(t-3,999%)	-0,2189	-1,7166	0,0862	0,0014	Zpožděné skoky shrinkage est. (99,9%)(3)	
IJV(95%)	-0,0001	-3,4530	0,0006	0,0057	Intenzita skoků odhadnutých při alfa=95%	Odhadovaná intenzita skoků
IJV(99%)	-0,0001	-3,0593	0,0022	0,0045	Intenzita skoků odhadnutých při alfa=99%	
IJV(999%)	-0,0003	-3,5635	0,0004	0,0061	Intenzita skoků odhadnutých při alfa=99%	

Nyní se pokusíme sestrojit vícerozměrný regresní model pro odhad volatilitní rizikové prémie a následné predikce realizované volatility. Vysvětlující proměnné do modelu vybereme na základě stepwise selection procedure aplikované na in-sample období. Podstatou této procedury je kombinace fází forward selection a backward selection. Ve fázi forward selection jsou pokusně přidávány nové vysvětlující proměnné do modelu (vždy jedna po druhé), z nichž je nakonec vybrána ta, která nejvíce zvýší věrohodnost (likelihood) modelu (je-li dané zvýšení statisticky významné, jinak algoritmus končí). Každá forward selection fáze je následována backward selection fází, při které pokusně vyhazujeme proměnné z modelu (opět jednu po druhé) a nakonec vyřadíme tu proměnnou, jejíž vyřazení vedlo k nejnižšímu poklesu věrohodnosti, je-li daný pokles věrohodnosti statisticky nevýznamný (v opačném případě všechny proměnné v modelu zůstávají).

Na základě výše popsané procedury (aplikované při 5% hladině významnosti) byl zkonstruován vícerozměrný model jehož proměnné jsou v Tabulce 5. Pořadí proměnných v tabulce je stejné, v jakém byly přidávány do modelu (dá se tedy říct, že od té nejvýznamnější). Je též zajímavé, že model neobsahuje konstantu (vyšla statisticky nevýznamná).

Tabulka 5 - Vícerozměrný model pro odhad RVP(t) (α = 5%) (In-sample)

Vysvětlující proměnná	beta	t-val	p-val	Popis proměnné
ERP(t|t-1)	0,3455	4,0609	0,0001	Ex ante odhad volatilitní prémie
EWMA((ΔRV(t-1)^2),10)	5105,3308	5,9056	0,0000	Volatilita zpožď. realizované volatility (10)
EWMA((ΔBV(t-1)^2),10)	-7130,3140	-4,7699	0,0000	Volatilita zpožď. bipower variation (10)
RVP(t-3)	-0,2363	-6,5422	0,0000	Zpožděná realizovaná vol. Prémie (3)
RVP(week)	0,3899	5,1811	0,0000	Realizovaná vol. Prémie za poslední týden
RJV(t-1,0%)	0,4007	3,3980	0,0007	Zpožděné skoky dle max(BV-RV,0) (1)
ΔERP(t|t-1)	0,3258	3,8434	0,0001	Změna ex ante volatilitní prémie
EWMA((ΔMFV(t|t-1)^2),5)	3959,1614	2,2075	0,0275	Volatilita volatility dle MFV (5)
RJV(t-3,99%)	-0,3067	-2,4311	0,0152	Zpožděné skoky shrinkage est. (99%)(3)

Z tabulky je vidět, že hned první přidanou proměnnou byla ex-ante předpověď volatilitní rizikové prémie, která vykazovala nejsilnější predikční schopnost i v případě jednorozměrných modelů.

Dále algoritmus do modelu zařadil proměnné vztahující se k 10denní volatilitě realizované volatility a volatilitě bipower variation, a to překvapivě s rozdílným znamínkem. Zdá se tedy, že předpovědní sílu má v tomto případě zejména rozdíl mezi oběma těmito volatilitami, který lze dát do souvislosti s volatilitou skokové složky.

Další 2 vysvětlující proměnné se vztahují k minulým hodnotám realizované volatilitní prémie. Zejména pozitivní závislost na průměru z této prémie v posledním týdnu je pochopitelná a odpovídá pozitivní autokorelaci v dané časové řadě.

Mezi zbylé vysvětlující proměnné spadá realizovaná velikost skoků RJV (t - 1,0%) odhadnutá dle rovnice (17), která pozitivně ovlivňuje výši volatilitní prémie, dále zpožděná hodnota změny ex-ante volatilitní rizikové prémie (ΔERP (t|t - 1)), krátkodobá volatilita Model-Free volatility, či zpožděné skoky identifikované při 99% hladině významnosti.

Vzhledem k tomu, že u některých proměnných lze jen těžko hledat ekonomické důvody, které by vysvětlovaly jejich vliv na výši volatilitní rizikové prémie, rozhodli jsme se celý algoritmus spustit ještě jednou, při přísněji stanovené hladině významnosti (1%), tak aby byly vybrány skutečně jen ty nejvýznamnější vysvětlující proměnné.

Tabulka 6 - Vícerozměrný model pro odhad RVP(t) (α = 1%) (In-Sample)

Vysvětlující proměnná	beta	t-val	p-val	Popis proměnné
ERP(t|t-1)	0,5116	7,9183	0,0000	Ex ante odhad volatilitní prémie
EWMA((ΔRV(t-1)^2),10)	3850,7782	4,8480	0,0000	Volatilita zpožď. realizované volatility (10)
EWMA((ΔBV(t-1)^2),10)	-4641,9336	-3,9272	0,0001	Volatilita zpožď. bipower variation (10)
RVP(t-3)	-0,1848	-5,4546	0,0000	Zpožděná realizovaná vol. Prémie (3)
RVP(week)	0,2801	3,9449	0,0001	Realizovaná vol. Prémie za poslední týden
RJV(t-2,0%)	0,3096	2,7080	0,0069	Zpožděné skoky dle max(BV-RV,0) (2)

Z výsledků je patrné, že i po zvýšení požadované hladiny významnosti některé sporné proměnné jako RVP (t - 3) v modelu zůstaly. Navíc proměnná RJV (t - 1,0%) byla nyní vystřídána proměnnou RJV (t - 2,0%), což lze jen těžko interpretovat.

Tabulka 7 zobrazuje R-squared obou vytvořených modelů, jakož i dvou benchmark modelů, u kterých je jedinou regresní vysvětlující proměnnou ex-ante odhad volatilitní rizikové prémie (ERP (t|t - 1)) vypočtený na základě rozdílu MFV a ARFIMA-RV (v tabulce značeno jako P (MFV)), případně BS-IV a ARFIMA-RV (značeno jako P (BS-IV)).

Tabulka 7 - Porovnání modelů pro odhad RVP(t)

	SSP(5%)	SSP(1%)	P(MFV)	P(BS-IV)
In-Sample	0,1761	0,1609	0,0812	0,0891
Out-Sample	0,1075	0,1565	0,1294	0,1133

Z tabulky je patrné, že vícerozměrné modely vytvořené pomocí Stepwise Selection Procedure (SSP) dokázaly výrazně lépe vystihnout vývoj volatilitní rizikové prémie v in-sample období. V out-sample období však model vytvořený při 5% hladině významnosti dosáhl nejhoršího výsledku, což je zřejmě způsobeno tím, že se příliš přizpůsobil vývoji náhodné složky v in-sample období (overfitting), což je obvykle způsobeno příliš velkým množstvím vysvětlujících proměnných a tím i parametrů.

Naproti tomu model vytvořený při 1% hladině významnosti dosáhl velice dobrých výsledků jak v in-sample období tak i v out-sample období, kdy výrazně překonal oba benchmarky a lze jej tak považovat za nejlepší z testovaných modelů. Závěrem tedy je, že zapojení více vysvětlujících proměnných do modelů pro předvídání volatilitní rizikové prémie má smysl, je však třeba vyvarovat se problému overfitting.

Druhou otázkou je, zda za pomocí odhadnuté volatilitní rizikové prémie jsme schopni zvýšit předpovědní sílu opčních modelů předvídání volatility. Tabulka 8 porovnává dosažené hodnoty R-Squared pro 8 modelů volatility využívajících nějaké měřítko volatilitní prémie. V prvních čtyřech případech byly predikce vytvořeny jako rozdíl MFV a volatilitní rizikové prémie odhadnuté pomocí SSP(5%), SSP(1%), či na základě benchmark modelů P(MFV) a P(BS-IV). Ve zbylých 4 sloupcích byl zvolen alternativní postup, kdy proměnné používané pro odhad volatilitní rizikové prémie dosazujeme spolu s opční predikcí volatility na základě MFV do separátního lineárního regresního modelu pro předvídání realizované volatility.

Tabulka 8 - Výsledky modelů využívajících odhadů RVP(t) k předvídání RV(t)

	Odečítáme odhad RVP(t) od MFV(t)				Separátní regresní model pro RV(t)			
	SSP(5%)	SSP(1%)	P(MFV)	P(BS-IV)	SSP(5%)	SSP(1%)	P(MFV)	P(BC-IV)
In-Sample	0,7036	0,6982	0,6695	0,6640	0,7036	0,6982	0,6748	0,6744
Out-Sample	0,5204	0,5467	0,5321	0,5250	0,5198	0,5448	0,5498	0,5573

Zaměříme-li se na levou polovinu tabulky, obsahující modely, kde predikce volatility byla spočtena jako rozdíl mezi Model-Free volatilitou a regresně odhadnutou volatilitní rizikovou prémií, vidíme, že model využívající prémie vypočtené pomocí SSP(1%), dosáhl výrazně lepších výsledků než benchmark modely a že jeho R-Squared je též vyšší než u standardních modelů volatility v Tabulce 3. Odečtením regresně odhadnuté volatilitní prémie od Model-Free volatility tak lze dosáhnout výrazného zvýšení predikčních schopností.

Na druhou stranu z výsledků v pravé polovině tabulky je vidět, že nejvyšších R-Squared v out-sample období dosáhly jednoduché modely využívající defakto jen dvou vysvětlujících proměnných v podobě predikcí MFV a ARFIMA-RV, a že přidání zbylých vysvětlujících proměnných do těchto modelů vedlo překvapivě ke snížení jejich predikčních schopností v out-sample období. Zdá se tedy, že potenciální přidaná hodnota dodatečných vysvětlujících proměnných při předvídání volatility není natolik vysoká, aby to vyvážilo problémy spojené s větším přizpůsobením jejich parametrů náhodné složce predikovaných procesů.

Závěr

Cílem výzkumu bylo zjistit, které vysvětlující proměnné nejvíce ovlivňují velikost volatilitní rizikové prémie definované jako rozdíl mezi opční implikovanou volatilitou (t.j. Model-Free volatilitou) a následnou realizovanou volatilitou. Byla sestrojena série jednorozměrných regresí, z nichž jako nejsilnější vysvětlující proměnná vyšel ex-ante odhad volatilitní prémie spočítaný na základě rozdílu mezi Model-Free volatilitou (MFV) a predikovanou volatilitou pomocí modelu ARIFMA-RV. Podařilo se též prokázat autokorelaci ve vývoji volatilitní prémie, kdy její současná hodnota pozitivně závisí na hodnotách za poslední den, týden i měsíc. Významný pozitivní vliv na výši volatilitní prémie má též úroveň volatility, volatilita volatility, jakož i zpožděné hodnoty cenových skoků identifikovaných při různých hladinách významnosti. Poněkud překvapivě se nepodařilo prokázat pozitivní závislost na odhadované intenzitě skoků odhadnuté pomocí Hawkesova procesu.

Dalším cílem výzkumu bylo vytvořit vícerozměrný lineární regresní model, který by umožnil přesný odhad volatilitní rizikové prémie ex-ante. Pro výběr vysvětlujících proměnných byla použita Stepwise Selection Procedure při hladinách významnosti 5% a 1%. V obou případech vyšla jako nejsilnější vysvětlující proměnná volatilitní riziková prémie odhadnutá na základě rozdílu predikcí MFV a ARFIMA-RV. Mezi další vysvětlující proměnné zařazené do modelu spadá rozdíl mezi volatilitou realizované volatility a volatilitou bipower variation, zpožděná hodnota volatilitní prémie za poslední týden, jakož i zpožděné hodnoty skoků. Model sestrojený při 5% hladině významnosti obsahoval dohromady 9 vysvětlujících proměnných, což se ukázalo být příliš mnoho, model se příliš přizpůsobil datům v in-sample období a v out-sample období se jeho předpovědní síla prudce snížila (pod úroveň obou benchmarků založených na jednorozměrných regresích využívajících rozdílů MFV a ARFIMA-RV). Naproti tomu model sestrojený při 1% významnosti (obsahující jen 6 vysvětlujících proměnných) dosáhl v obou obdobích výrazně lepších výsledků než oba benchmarky.

Cílem výzkumu bylo též pokusit se využít predikcí volatilitní prémie při předvídání volatility. Přestože se pomocí výše zmíněného modelu při 1% hladině významnosti podařilo zvýšit predikční schopnost modelu MFV v porovnání se standardními modely volatility, nepodařilo se překonat některé z benchmarků v podobě dvourozměrných regresních modelů využívajících pouze hodnot MFV a ARFIMA-RV. Otázka, zda složité modelování volatilitní rizikové prémie může vést k přesnějším predikcím volatility tak zůstává stále otevřená.

Reference

[1] ANDERSEN, T.G. and BOLLERSLEV, T., (1998). "Answering the Skeptics: Yes, Standard Volatility Models Do Provide Accurate Forecasts," International Economic Review, November 1998,Vol. 39, No.4, p.885-905.

[2] ANDERSEN, T.G., BOLLERSLEV, T., CHRISTOFFERSEN, P.F. and DIEBOLD, F.X., (2005). "Volatility Forecasting", National Bureau of Economic Research, March 2005, NBER Working Paper No. 11188.

[3] ANDERSEN, T.G., BOLLERSLEV, T. and DIEBOLD, F.X., (2003). "Some Like it Smooth, and Some Like it Rough: Untangling Continuous and Jump Components in Measuring, Modeling, and Forecasting Asset Return Volatility", The Wharton Financial Institutions Center, September 2003, The Working Paper Series

[4] ANDERSEN, T.G., BOLLERSLEV, T. and DIEBOLD, F.X., (2007). "Roughing it up: Including jump components in the measurement, modeling and forecasting of return volatility", Review of Economics and Statistics, November 2007, Vol. 89, No. 4, p.701-720.

[5] ANDERSEN, T.G. and BONDARENKO, O., (2007). "Construction and Interpretation of Model-free Implied Volatility", CREATES Research Paper, September 2007-24, School of Economics and Management University of Aarhus.

[6] ANDERSEN, T.G., DOBREV, D. and SCHAUMBURG, E., (2010). "Jump-Robust Volatility Estimation using Nearest Neighbor Truncation", Federal Reserve Bank of New York, August 2010, Staff reports, No.465, (p.37)

[7] BAKSHI, G. and KAPADIA, N., (2003). "Delta-hedged gains and the negative market volatility risk premium", Review of Financial Studies, February 2003, Vol.16, No.2, p.527-566

[8] BARNDORFF-NIELSEN, Ole E. and SHEPHARD Neil, (2004). "Power and Bipower Variation with Stochastic Volatility and Jumps", Journal of Financial Econometrics, 2004, Vol.2, No.1, p.1-48

[9] BLACK, Fischer and SCHOLES, Myron, (1973). "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", Journal of Political Economy, May-June 1973, Vol.81, No.3, p.637-654

[10] BLAIR, B.J., POON, S-H. and TAYLOR, S.J., (2000). "Forecasting S&P 100 Volatility: The Incremental Information Content of Implied Volatilities and High Frequency Index Returns", November 2000, Working paper, p.1-35, Journal of Econometrics, November 2001, Vol.105, No.1, p.5-26.

[11] BOLLERSLEV, Tim, (1986). "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity", Journal of Econometrics, April 1986, Vol.31, No.3, p.307-327

[12] BOLLERSLEV, T., TAUCHEN, G. and ZHOU, H., (2009). "Expected Stock Returns and Variance Risk Premia", The Review of Financial Studies, November 2009, Vol.22, No.11, p.4463-4492

[13] BOLLERSLEV, T., GIBSON, M. and ZHOU, H., (2011). "Dynamic estimation of volatility risk premia and investor risk aversion from option-implied and realized volatilities", Journal of Econometrics, January 2011, Vol.160, No.1, p.235-245

[14] BONDARENKO, Oleg, (2003). "Why are put options so expensive? ", University of Illinois, Chicago, April 2003, UIC Working paper.

[15] BOX, G.E.P. and JENKINS, G.M., (1970). "Time series analysis: Forecasting and control" 1th Edition, Wiley, 1970, (p.1-537)

[16] BRITTEN-JONES, Mark and NEUBERGER, Anthony, (2000). "Option Prices, Implied Price Processes and Stochastic Volatility", Journal of Finance, April 2000, Vol. 55, No. 2, p.839-866

[17] CARR, Peter and WU, Liuren, (2009). "Variance Risk Premiums", The Review of Financial Studies, March 2009, Vol.22, No.3, p.1311-1341

[18] CHEN, Ke and POON, Ser-Huang, (2013). "Variance Swap Premium under Stochastic Volatility and Self-Exciting Jumps", Manchester Business School, University of Manchester, January 2013, Working paper, p.1-50,

[19] CORSI, Fulvio, (2004). "A Simple Long Memory Model of Realized Volatility", Institute of Finance, University of Lugano, Switzerland, August 2004, Working paper, p.1-31

[20] CORSI, F., PIRINO, D. and RENÓ, R., (2008). "Volatility Forecasting: The Jumps do Matter", SSRN Working paper, June 2008, p.1-43,

[21] CORTE, D.P., RAMADORAI, T. and SARNO, L., (2013). "Volatility Risk Premia and Exchange Rate Predictability", Working paper, July 2013, p.1-49

[22] COVAL, D. J. and SHUMWAY, T., (2001), "Expected Option Returns", Journal of Finance, June 2001, Vol.56, No.3, p.983-1009.

[23] DING, Z., GRANGER, C.W.J. and ENGLE, R.F., (1993). "A long memory property of stock market returns and a new model", Journal of Empirical Finance, June 1993, Vol.1, No.1, p.83-106.

[24] ENGLE, Robert F., (1982). "Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation", Econometrica, July 1982, Vol.50, No.4, p.987-1007

[25] ERAKER, Bjorn, (2009). "The Volatility Premium", Wisconsin School of Business, University of Wisconsin, 2009, NCCR Working paper

[26] ERAKER, B., JOHANNES, M. and POLSON, N., (2003). "The Impact of Jumps in Volatility and Returns." The Journal of Finance, June 2003, Vol. 58, No. 3, pp. 1269-1300.

[27] FAMA, E. F. and FRENCH, K. R., (1993). "Common Risk Factors in the Returns on Stocks and Bonds", Journal of Financial Economics, February 1993, Vol.33, No.1, p.3-56.

[28] FIČURA, Milan, (2013). "Metody předvídání volatility", Diplomová práce, Vysoká škola ekonomická v Praze, 2013, Fakulta financí a účetnictví.

[29] FIGLEWSKI, Stephen, (2004). "Forecasting Volatility", New York University Stern School of Business, April 2004, Working paper, p.1-132.

[30] FULOP, Andras., LI, Junye and YU, Jun, (2012). "Investigating Impacts of Self-Exciting Jumps in Returns and Volatility: A Bayesian Learning Approach", Hi-Stat, Institute of Economic Research, Hitotsubashi University, December 2012, Discussion Paper, p.1-56.

[31] GAGLIARDINI, P., OSSOLA, E. and SCAILLET, O., (2010). "Time-Varying Risk Premium In Large Cross-Sectional Equity Datasets", December 2010, Working paper, p.1-66.

[32] GRANGER, C.W.J. and JOYEUX, R., (1980). "An introduction to long-memory time series models and fractional differencing", Journal of Time Series Analysis, January 1980, Vol.1, No.1, p.15-29

[33] HSEU, M-M., CHEN, W-P. and CHUNG, H., (2007). "The Forecasting Performance of Model Free Implied Volatility: Evidence from an Emerging Market", Chihlee Institute of Technology, Taiwan, National Chiao Tung University, Taiwan, 2007, Working paper, p.1-28.

[34] HULL, John C., (2012). "Options, Futures, and Other Derivatives", 8th Edition, Botston, Pearson Prentice Hall, 2012, ISBN 0-13-216494-9

[35] ISHIDA, Isau and WATANABE, Toshiaki, (2008, 2009). "Modeling and Forecasting the Volatility of the Nikkei 225 Realized Volatility Using the ARFIMA-GARCH Model", University of Tokyo, Hitotsubashi University, October 2008 (January 2009), CIRJE-F-608 Discussion Paper, p.1-32.

[36] JIANG, G.J. and TIAN, Y.S., (2005). "The model-free implied volatility and its information content", Review of Financial Studies, 2005, Vol.18, No.4, p.1305-1342.

[37] KRAUS, A. and LITZENBERGER, R. H., (1976). "Skewness Preference and the Valuation of Risk Assets", Journal of Finance, September 1976, Vol.31, No.4, p.1085-1100.

[38] LANNE, Markku, (2006). "Forecasting Realized Volatility by Decomposition", European University Institute, 2006, Economics Working Papers, ECO2006/20, p.1-26.

[39] MINCER Jacob and ZARNOWITZ Victor, (1969). “The Evaluation of Economic Forecasts, Economic Forecasts and Expectations“, New York: National Bureau of Economic Research, 1969, NBER, ISBN: 0-870-14202-X, p.1-47.

[40] MARKOWITZ, Harry, (1952). “Portfolio Selection“, The Journal of Finance, March 1952, Vol.7, No.1, p.77-91.

[41] MUZZIOLI, Silvia, (2008). Option based forecasts of volatility: An empirical study in the DAX index options market, CeFin working paper, 2008, p.1-47.

[42] NEUMANN, John von and MORGENSTERN, Oskar, (1953). “Theory of Games and Economic Behavior“, Second Edition, Princeton, Princeton Universuíty Press, 1953, ISBN 978-0-691-13061-3

[43] POON, S-H. and GRANGER, C.W.J., (2003). “Forecasting Volatility in Financial Markets: A Review“, Journal of Economic Literature, June 2003, Vol.41, No.2, p.478-539.

[44] PONG, S., SHACKLETON, M.B., TAYLOR, S.J. and XU, X., (2004). “Forecasting Currency Volatility: A Comparison of Implied Volatilities and AR(FI)MA Models“, Journal of Banking and Finance, October 2004, Vol.28, No.10, p.2541-2563.

[45] SHARPE, William F., (1964). “Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk“, Journal of Finance, September 1964, Vol.19, No.3, p.425-442.

[46] SHARPE, William F., (1966). “Mutual Fund Performance“, Journal of Business, January 1966, Vol.39, No.1, Part 2: Supplement on Security Prices, p.119-138.

[47] SHEPHARD, Neil, (2005). “Stochastic Volatility: Selected Readings (Advanced Texts in Econometrics)“, Oxford: Oxford University Press, May 2006, Edited by Neil Shephard

[48] SHI, Peng, (2009). “Correcting Finite Sample Biases in Conventional Estimates of Power Variation and Jumps“, Duke University, Durham NC, 27708, April 2009, Final Paper for Econ201FS, p.1-22

[49] SMITH, D.R. and WHITELAW, R.F., (2009). “Time-Varying Risk Aversion and the Risk-Return Relation“, June 2009, Working paper, p.1-39.

[50] TODOROV, Viktor, (2009). “Variance Risk Premium Dynamics: The Role of Jumps“, The Review of Financial Studies, January 2010, Vol.23, No.1, p.345-383

[51] WITZANY, Jiří, (2013). “Estimating Correlated Jumps and Stochastic Volatilities“, Prague Economic Papers, 2013, Vol.2013, No.2, p.251-283

[52] YSUSI, Carla, (2006). “Detecting Jumps in High-Frequency Financial Series Using Multipower Variation“, Banco de Mexico, September 2006, Working paper, No.2006-10, p.1-35.

[53] ZHANG, L., MYKLAND, Per A. and AIT-SAHALIA, Y., (2005). "A Tale of Two Time Scales: Determining Integrated Volatility With Noisy High-Frequency Data", Journal of the American Statistical Association, December 2005, Vol.100, No.472, p.1394-1411.

The research has been supported by the Czech Science Foundation Grant P402/12/G097 Dynamical Models in Economics

Ing. Milan Fičura, University of Economics Prague (Faculty of Finance and Accounting, Department of Banking and Insurance), Winston Churchill Square 4, Prague 3, e-mail: xficm03@vse.cz.