



## **Konzistence matice párových porovnání při použití Analytického hierarchického procesu (AHP).**

### **Consistency of pair-wise matrix when using Analytic hierarchy process method (AHP).**

Rostislav Tomeš, Július Alcnauer

**Abstrakt:** Příspěvek se zabývá metodou Analytický hierarchický proces (AHP), sestavením matice párových porovnání a vlastního vektoru této matice. Jednotlivé kroky metody AHP jsou popsány na dvou krátkých příkladech s ohledem na konzistenci matice párových porovnání.

**Klíčová slova:** AHP, konzistence, Excel

**Abstract:** The paper deals with the method of Analytic Hierarchy Process (AHP), constructing a matrix of pair-wise comparison and eigenvector of the matrix. The steps of the method AHP are described at two short examples with regard to the consistency of the matrix of pair-wise comparison.

**Keywords:** AHP, consistency, Excel

**JEL Classification:** C02

## Úvod

Současné podmínky na světových trzích kladou zvýšené nároky na kvalitu manažerského rozhodování. Chybné rozhodnutí může přinést velké ztráty a někdy i likvidaci firmy. V přípravě manažerů pro 21. století je proto důležité vrátit význam matematice a jejím aplikacím, např. při rozhodovacích procesech. Tento přístup může být přínosem i pro menší firmy. Popisovaná Saatyho metoda je využitelná při vícekritériálním rozhodování a zkvalitňuje analytický hierarchický proces, při kterém pomáhá nalézt neoptimálnější variantu pro rozhodovatele.

Cílem rozhodování rozumíme určitý budoucí stav okolí rozhodovatele vyplývající z nutnosti uskutečnit určité potřeby nebo plnit jisté funkce. Cíle se má dosáhnout realizací některé z variant rozhodování. Cíl rozhodování se obvykle hierarchicky rozkládá do dílčích cílů, které se transformují do podoby rozhodovacích kritérií. [RAMÍK, 2010]

Lidé jsou při rozhodování mezi variantami ovlivněni přítomností, okolním prostředím, sociálními i politickými vlivy. Rozhodují se na základě svých znalostí, zkušeností, analyzují rizika a přínosy svého rozhodnutí. Rozhodování můžeme od subjektivních vlivů oprostít, budeme-li hodnotit alternativy každou zvlášť. Je jednodušší alternativy porovnávat než se snažit spočítat jejich preference. Přitom porovnávání se musí pohybovat v přípustném rozsahu konzistence. Metoda Analytický hierarchický proces (AHP) zahrnuje jak porovnávání, tak i vyhodnocování. [SAATY, 1994]

## 1. Základní pojmy pro metodu AHP

Saatyho analytický hierarchický proces je matematická metoda, přesněji řečeno matematický model. Pro jeho popis je potřeba uvést některé pojmy a definice z lineární algebry.

### 1.1 Definice

*Vlastní číslo* matice  $A$  typu  $n \times n$  je  $\lambda$  komplexní číslo které vyhovuje rovnici  $\det (A_i - \lambda I) = 0$ , kde  $I$  je *jednotková matice*. Rovnice  $\det (A_i - \lambda I) = 0$  se nazývá *charakteristická rovnice matice A*.

## 2. Rozhodování

Učinit rozhodnutí je běžným úkolem každého manažera, zde je v roli *rozhodovatele* (decision maker). Úkolem rozhodovatele je vybrat jednu nebo více variant z množiny všech přípustných variant. *Rozhodovatele* tedy definujeme jako subjekt, který má učinit rozhodnutí, vybrat variantu, která je hodnocena nejlépe, *optimální variantu*. Výběr

z množiny  $m$  možných variant usnadňuje vícekriteriální analýza. Strukturování variant do hierarchie, popis jednotlivých kritérií rozhodování, jejich kvantifikace a vyhodnocení, to umožňuje vícekriteriální rozhodovací proces.

*Varianty* (alternativy) označíme v následujícím textu jako  $V_i$  (pro  $i = 1, \dots, m$ ). Hlediska, podle kterých varianty rozhodovatel posuzuje, nazveme *kritéria*, ta budeme značit  $K_i$  (pro  $i = 1, \dots, n$ ). Kritéria mohou být buď *kvalitativní*, nebo *kvantitativní*. Kvalitativní kritéria nelze objektivně měřit, a proto je v rozhodovacím procesu určujeme většinou podle bodové stupnice nebo porovnáním variant mezi sebou *metodou párového porovnání*. S hodnotami ze stupnice nebo párového porovnání dále pracujeme jako s kvantitativními kritérii. S kvantitativními kritérii, například cena, výše platu, apod. pracujeme přímo jako s hodnotami.

## 2.1 Metoda párového porovnání

Metoda párového porovnání (pair-wise comparison) umožňuje přiřadit jednotlivým variantám relativní hodnoty, nazývané váhy. Nejdůležitější varianta je pak vypočítána metodou vlastních čísel (eigenvalue method) [ESLAMIPoor, 2013]. Někdy je metoda nazývána metodou vlastního vektoru.

## 2.2 Saatyho metoda AHP

Matematický model používaný ve vícekriteriální rozhodovací metodě vychází ze stanovení kritérií mezi jednotlivými faktory, které ovlivňují rozhodování. Pokud se manažer rozhoduje mezi více variantami, je pro každou variantu nutné stanovit kritéria, resp. vztahy mezi jednotlivými faktory. Získání co nejvíce pravděpodobných hodnot kritérií je nejtěžší částí rozhodovacího procesu. Další je již jen matematika.

Metodu AHP Analytic Hierarchy Process popsal Prof. Dr. Thomas L. Saaty, profesor na University of Pittsburgh, kde vyučuje na Joseph M. Katz Graduate School of Business. Profesor Saaty popsal metodu vícekriteriálního rozhodování nazývanou dnes jeho jménem.

Preferenze jednotlivých variant jsou ohodnoceny škálou lichých čísel od 1 do 9, která vyjadřují stupnici intenzity významu varianty. Pro vytvoření Saatyho matice musíme přiřadit absolutní důležitost jednotlivým variantám, podle preferencí rozhodovatele nebo kolektivu rozhodovatelů, a použít uvedenou devítibodovou stupnici. Pro citlivější vyjádření intenzity významu je možné použít mezistupně, sudá čísla 2, 4, 6, 8. Přiřazení důležitosti jednotlivých variant může provádět kolektiv rozhodovatelů metodou brainstormingového setkání, dokonce pro každé kritérium odděleně. Tím se z rozhodovacího procesu více vyloučí subjektivní faktor rozhodovatele. Pro zápis preferencí používá metoda AHP metodu párového porovnání.

Tabulka 1 - Saatyem doporučená stupnice intenzity významu

Číselné měřítko	slovní měřítko	komentář
1	Varianty jsou <b>stejně</b> významné	Obě porovnávané varianty mají stejnou vlastnost
3	Varianta je <b>mírně</b> důležitější, než jiná varianta	První varianta je slabě významnější než druhá
5	Varianta je <b>mnohem</b> důležitější, než jiná varianta	První varianta je silně významnější než druhá
7	Varianta je <b>výrazně</b> důležitější, než jiná varianta	První varianta je velmi silně významnější než druhá
9	<b>extrémní</b> významnost jedné varianty nad jinou variantou	První varianta je ještě více než silně významnější než druhá

[ČESTNĚJŠÍ, 2001]

Hodnoty ze sloupce číselné měřítko zapíšeme do Saatyho matice  $S_i$ . Z výše uvedených definic vyplývá, že:

- 1) matice  $S_i$  je *čtvercová*  $n \times n$ ,
- 2) matice  $S_i$  je *reciproční*, tedy platí  $S_{ji} = 1 / S_{ij}$
- 3) prvky Saatyho matice  $S_i$  vyjadřují odhad podílů vah  $i$ -té a  $j$ -té varianty. V matici se tedy vyskytují lichá čísla ze škály 1 až 9 nebo podíly 1 / liché číslo, která vyjadřují preference  $i$ -té varianty k  $j$ -té a naopak,
- 4) *diagonálu* matice tvoří číslo 1, neboť platí  $S_{ji} = S_{ij} = 1$  pro  $i=j$ , libovolná varianta v porovnání sama k sobě je stejně významná.

### 2.3 Ukázkové příklady

Pro ukázkou principů metody AHP jsme zvolil dva krátké příklady, které byly součástí komplexnějšího rozhodovacího procesu, výběru informačního systému pro menší firmu. Vybírali jsme ze šesti různých afirmačních systémů, pro účely tohoto článku nazvaných IS1, IS2,... IS6.

V našem příspěvku jsme zvolili jedno *kvalitativní* kritérium, a to kritérium nazvané *Implementovaný databázový stroj*. Rozhodovatelé tedy vybírají informační systém jen podle toho, nad kterých databázovým strojem pracuje. Hierarchické uspořádání roz-

hodovacího procesu spočívá právě v tom, aby rozhodovatelé hodnotili vždy jen jedno kritérium odděleně od ostatních kritérií. Zde se tedy soustřeďují jen na stanovení toho, který informační systém jim podle toho kritéria vychází významnější než jiný.

Jako druhé kritérium ukázkového příkladu jsme zvolili *kvantitativní* kritérium, *Cena*. Zde ukazujeme, jak probíhá sestavení matice párových porovnání pro *kvantitativní* kritérium.

U obou příkladů jsme stanovili *index konzistence* matice párových porovnání.

## 2.4 Vyhodnocení kvalitativních kritérií

Při vyhodnocení kvalitativních kritérií uplatníme princip *párového porovnání*. U kvalitativních kritérií hodnotíme jednotlivé varianty podle Saatyho stupnice intenzita významu (Tabulka 1). *Škálování* umožňuje hodnotitelům porovnávat varianty vždy jen podle jednoho kritéria, a to věcně, bez snahy porovnávat řádově odlišné prvky. [RAMÍK, 2010]

Jednotlivé posuzované varianty sestavíme do tabulky a zapíšeme hodnoty párového porovnání, tedy vztah významnosti jedné varianty vůči jiné variantě. Například druhý IS je podle kritéria 1 mírně důležitější než první IS, tedy  $v_2 / v_1 = 3 / 1$  a podle principu reciprocity  $v_1 / v_2 = 1 / 3$ . V druhém ukázkovém řádku formuláře párového porovnání je první IS podle kritéria 1 výrazně důležitější než třetí IS, tedy  $v_3 / v_1 = 1 / 7$  a  $v_1 / v_3 = 7 / 1$ . Takto potom zapisujeme významnosti do Saatyho matice.

Použili jsme formulář párového porovnání v Excelu.

### Formulář párového porovnání

Varianta 1	9 7 5 3 1 <b>3</b> 5 7 9	Varianta 2
Varianta 1	9 <b>7</b> 5 3 1 3 5 7 9	Varianta 3

Ukázka formuláře pro párové porovnání

Podle Tabulky 1 jsme zapsali porovnání každé varianty vůči ostatním variantám. Vybranou intenzitu významu jsme označili v Excelu červenou barvou písma, následně jsme nepoužité varianty pro lepší přehlednost smazali. Pro náš příklad pořízení firemního informačního systému jsme tak dostali vyplněný formulář pro kritérium *Implementovaný databázový stroj*:

## Formulář párového porovnání

IS1		<b>3</b>		IS2
IS1			<b>7</b>	IS3
IS1			<b>7</b>	IS4
IS1		<b>3</b>		IS5
IS1	<b>3</b>			IS6
IS2			<b>7</b>	IS3
IS2		<b>3</b>		IS4
IS2		<b>3</b>		IS5
IS2	<b>3</b>			IS6
IS3			<b>5</b>	IS4
IS3		<b>3</b>		IS5
IS3	<b>3</b>			IS6
IS4		<b>1</b>		IS5
IS4			<b>7</b>	IS6
IS5			<b>7</b>	IS6

Tabulka vzájemného porovnání variant vzhledem ke kritériu Implementovaný databázový stroj

Saatyho matice párových porovnání  $S_i$  pak má tvar:

varianty:	Saatyho matice						
	v1	v2	v3	v4	v5	v6	
IS1	v1	1	1/3	1/7	1/7	1/3	3
IS2	v2	3	1	1/7	1/3	1/3	3
IS3	v3	7	7	1	1/5	1/3	3
IS4	v4	7	3	5	1	1	1/7
IS5	v5	3	3	3	1	1	1/7
IS6	v6	1/3	1/3	1/3	7	7	1

Saatyho matice párových porovnání  $S_i$ .

## 2.5 Metoda vlastního vektoru matice (Eigen vector)

Pro matici párových porovnání  $S_i$  potřebujeme určit největší vlastní číslo matice  $\lambda_{\max}$  a následně normovaný vlastní vektor příslušného k největšímu vlastnímu číslu  $\lambda_{\max}$ .

Podle definice 2.7 řešíme rovnici  $\det(S_i - \lambda I) = 0$ , kde  $I$  je jednotková matice.

matice (S- $\lambda$ *I)						999,000 $\lambda$
=Si-lambda*I						9,88044E+17 det
3	-998	0	0	0	3	
7	7	-998	0	0	3	
7	3	5	-998	1	0	
3	3	3	1	-998	0	
0	0	0	7	7	-998	

Rovnice v Excelu pomocí maticového vzorce a funkce =DETERMINANT.

Pro řešení rovnice jsme použili *Hledání řešení*, tedy iterační postup v Excelu. Do buňky  $\lambda$  musíme zadat velké číslo, protože hledáme ze všech řešení největší  $\lambda_{\max}$ . Řešení rovnice  $\det(S_i - \lambda I) = 0$  konverguje v našem příkladu k hodnotě  $1,22 \cdot 10^{-5}$ , což můžeme považovat za uspokojivou přesnost řešení.  $\lambda_{\max}$  pak vychází 11,399.

matice (S- $\lambda$ *I)						11,39873977 $\lambda$
-10	0	0	0	0	3	1,22434E-05 det
3	-10	0	0	0	3	2,079747955 $I_s$
7	7	-10	0	0	3	
7	3	5				
3	3	3				
0	0	0				

**Stav hledání řešení** ? ✕

Pro buňku W20 bylo nalezeno řešení.

Cílová hodnota: 0

Aktuální hodnota: 1,22434E-0

Hledání řešení  $\lambda_{\max}$ .

## 2.6 Konzistence, index konzistence

Metoda AHP je založena na principu párového porovnání. Vytvořená matice je, podle výše uvedeného, *čtvercová, reciproční, diagonálu* matice tvoří číslo 1 a ideální by pro přesnost metody bylo, aby matice byla *konzistentní*.

Konzistenci matice párových porovnání  $S = (s_{ij})$  můžeme definovat takto: řekneme, že prvek  $x_i$  je  $s_{iq}$ -krát důležitější než prvek  $s_q$  (podle hodnotícího kritéria  $f$ ), a dále prvek  $s_q$  je  $s_{qj}$ -krát důležitější než prvek  $x_j$ , potom prvek  $x_i$  je  $s_{ij} = s_{iq} \cdot s_{qj}$ -krát důležitější než prvek  $x_j$ . Při porovnávání kvalitativních kritérií je však naprostá konzistence matice párových porovnání spíše výjimečná. Naopak, při porovnávání kvantitativních kritérií je matice párových porovnání dokonale konzistentní, platí totiž, že váhy, hodnoty kvantitativního kritéria jsou známy  $v_i > 0$  a  $v_j > 0$  a pro prvky matice párových porovnání platí  $S_{ji} = v_i / v_j$ . Platí-li uvedený vztah, matice  $S = (s_{ij})$  je reciproká a konzistentní. [RAMÍK, 2000]

Pro úspěšnost metody AHP je tedy důležitý *index konzistence*. Platí, že *maximální vlastní číslo* čtvercové matice párových porovnání  $S = (s_{ij})$  typu  $m \times m$ , která je vždy reciproká ale nemusí být konzistentní,  $\lambda_{\max}$  je větší nebo rovno  $m$ . Je-li matice  $S = (s_{ij})$  konzistentní, vždy platí, že  $\lambda_{\max} = m$ . *Indexem konzistence* nazýváme číslo  $C_1$  vypočítané ze vztahu

$$C_1 = \frac{\lambda_{\max} - 1}{m - 1}$$

*Index konzistence*  $C_1$  se pro konzistentní matici tedy rovná 1. *Nekonzistenci* matice vyjadřuje velikost odchylky  $C_1$  od hodnoty 1.

Podle výše uvedeného vztahu jsme stanovili *index konzistence* matice  $S_i$ , jeho hodnota je 2,0797, to ukazuje na nekonzistentní matici  $S_i$ . Většinou to znamená, že rozhodovatel si pravděpodobně v některých kritériích protičeří.

Původní Saatyho metodika pracuje s normovaným vlastním vektorem matice  $S_i$ , označíme jej  $w$ . Podle Definice 2.7 vytvoříme nejprve součin jednotkové matice  $I$  a  $\lambda_{\max}$  a potom maticový výraz  $(S_i - \lambda_{\max} I)$ . Hledáme řešení soustavy rovnic  $(S_i - \lambda_{\max} I) w = 0$ . Soustavu vyřešíme například pomocí nástroje *Řešitel* v Excelu nebo jiným běžným postupem.



	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W
27																			
28																			
29																			
30																			
31																			
32																			
33																			
34																			
35																			
36																			
37																			
38																			
39																			
40																			
41																			
42																			
43																			

  

vektor $w^T$	
1	2
3	4
5	6

  

matice $(S - \lambda_{\max} \cdot I)$	
-10	0
0	0
0	0
0	0
0	0
3	10,93459
3	3,63109
3	10,27045
0	-7,73782
0	-29,13656
-10	2,60756

  

**Parametry Řešitele**

Účejová funkce:

Hledat:  Max  Min  Hodnota:

Proměnné modelu:

Omezující podmínky:

Řešení soustavy rovnic.

Vlastní vektor  $w$  matice  $S_i$  odpovídající vlastnímu číslu  $\lambda_{\max}$  je

$w = (1,899; 2,454; 4,712; 4,629; 3,136; 5,518)$ , po normalizaci

$w = (0,085; 0,110; 0,211; 0,207; 0,140; 0,247)^T$ .

Nejvyšší hodnota ve vlastním vektoru matice  $S_i$  odpovídající vlastnímu číslu  $\lambda_{\max}$  je 0,247, tedy podle kritéria *Implementovaný databázový stroj* je nelépe hodnocený informační systém IS6.

## 2.7 Vyhodnocení kvantitativních kritérií

V případě kvantitativních kritérií, jakým je například cena, je postup při sestavování matice párového porovnání odlišný. Do matice  $S_i$  vyplňujeme přesný poměr ceny  $i$ -té a  $j$ -té posuzované varianty. Prvek matice se potom rovná  $S_{ij} = c_j / c_i$ .

V našem příkladu, podle kritéria *Cena údržby*, je první prvek symetrické a reciproční matice  $S_{11}$  roven samozřejmě 1, a další prvek  $S_{12}$  je určen poměrem cen prvních dvou posuzovaných IS, tedy  $3500,00 / 1450,00 = 2,41$ . Reciprocita matice  $S_i$  je pochopitelně zachována i při vyhodnocování kvantitativních kritérií, tedy i zde platí, že  $S_{ji} = 1 / S_{ij}$ .

Saatyho matice párových porovnání  $S_i$  pak má tvar:

varianty:	Saatyho matice						
	v1	v2	v3	v4	v5	v6	
IS1	v1	1	2,410	3,170	4,140	4,140	5,380
IS2	v2	0,414	1	1,311	1,714	1,714	2,229
IS3	v3	0,316	0,763	1	1,307	1,307	1,699
IS4	v4	0,242	0,583	0,765	1	1,000	1,300
IS5	v5	0,242	0,583	0,765	1,000	1	1,300
IS6	v6	0,186	0,449	0,588	0,769	0,769	1

Saatyho matice párových porovnání  $S_i$ .

Nejvyšší vlastní číslo matice  $S_i$ ,  $\lambda_{\max}$  vyšlo 6,00000000270831. To je způsobeno tím, že jsme řešili rovnici  $\det(S_i - \lambda_{\max} I) = 0$  pomocí iteračního nástroje *Hledání řešení* v Excelu. Toto řešení je vyhovující, determinant vychází 2,106  $10^{-5}$  ne přesně 0.

Saaty poukazuje na to, že pro *index konzistence*  $C_1 = 1$  vychází  $\lambda_{\max} = m$ , v našem případě by podle Saatyho mělo být  $\lambda_{\max} = 6$ . Díky nepřesnosti iteračního nástroje *Hledání řešení* v Excelu je *index konzistence* v našem příkladu roven 1,00000000054166, což můžeme považovat za Saatyem deklarovanou hodnotu 1.

Index konzistence  $C_1 = 1$ , což přesně odpovídá důkazům (kapitola 3.6). [SAATY, 1994]

Vlastní vektor  $w$  matice  $S_i$  odpovídající vlastnímu číslu  $\lambda_{\max}$  je pro kritérium Cena údržby

$w = (3,411; 1,413; 1,078; 0,824; 0,824; 0,634)$ , po normalizaci

$w = (0,417; 0,173; 0,132; 0,101; 0,101; 0,077)^T$ .

Vidíme, že nejvýznamnější je podle kritéria *Cena údržby* první informační systém IS1.

## Závěr

Na dvou krátkých příkladech jsme ukázali použití metody AHP, sestavením matice párových porovnání a stanovení nejvyššího vlastního čísla matice párových porovnání, v rozhodovacím procesu, a důležitost pomocného kritéria konzistence matice párových porovnání.

V současném složitém vývoji technologií a prostředí pro podnikání se objevuje stále více kritérií. V praxi se často jeví jako nepřehledná a někdy je racionální rozhodování nahrazeno intuitivním postupem nebo příklonem ke zkušenostem. Zkušenosti manažera se mohou pro-mítnout do stanovení vah jednotlivých kritérií. Mezi hlavními výhodami metody AHP lze uvést možnost nasazení při práci s kvalitativními a kvantitativními kritérii. Pomáhá lepší orientaci při rozhodování a optimalizaci zisku při rozhodování za jistoty ale také za rizika. Může představovat elegantní skloubení exaktních postupů se zkušenostmi manažerů.

## Reference

- [1] ČESTNĚJŠÍ, A. 2001. Manažerské rozhodovanie. Bratislava: Univerzita Komenského, 2001. str. 155. 80-247-1338-1.
- [2] DEMLOVÁ, M., PONDĚLÍČEK B. 1997. Matematická logika. Praha: ČVUT FEL, 1997. str. 160. ISBN 8001016838.
- [3] ESLAMIPOOR, R., SEPEHRIAR, A. 2013. Firm relocation as a potential solution for enviroment improvement using a SWOT-AHP hybrid method. Process Safety and Environmental Protection. 2013.
- [4] RAMÍK, J. 2000 Analytický hierarchický proces (AHP) a jeho využití v malém a středním podnikání. Karviná: Slezská univerzita v Opavě, 2000. 217 str. ISBN 80-7248-088-X.
- [5] RAMÍK, J. 2010 Analytický hierarchický proces (AHP) a jeho uplatnění při hodnocení a podpoře rozhodování. Jihlava: VŠP Jihlava, 2010. Matematika v ekonomické praxi. ISBN 978-80-87035-34-4.
- [6] REKTORYS, K. a kol, Přehled užití matematiky. 7. vydání. Praha: SNTL, 1981. ISBN 978-80-7196-180-2
- [7] SAATY, T. 1994. How to Make a Decision: The Analytic Hierarchy Process. Interfaces 1994, Sv. 24, Č. 6, str. 19-43.

*Ing. Rostislav Tomeš, Katedra informačních technologií a analytických metod, Vysoká škola obchodní v Praze o.p.s., Spálená 14, 110 00 Praha 1, email: Rostislav.Tomes@vso-praha.eu*

*PaedDr. Július Alcnauer, PhD., Katedra matematických metód a manažerskej informatiky, Prešovská univerzita v Prešove, Konštantínova 16, 080 01 Prešov, email: alcnauerjulius@gmail.com*